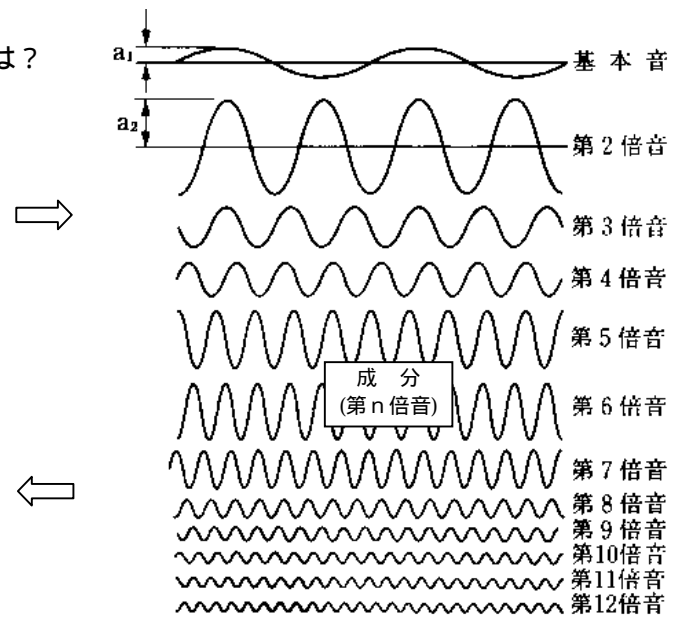
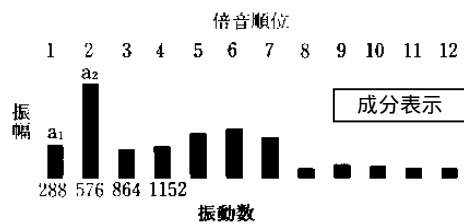
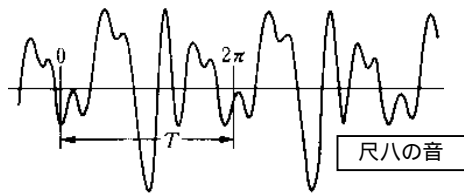


-1 信号の成分分析と調波合成

1. 楽器音の成分分析 ~ フーリエ級数展開とは？



上図のように音は様々な大きさの倍音成分から合成される (講談社「なっとくするフーリエ変換」から)。

$$\text{音} = \text{直流成分} + \sum_{n=1}^{\infty} (\text{成分の大きさ}) \cdot (\text{第 } n \text{ 倍音})$$

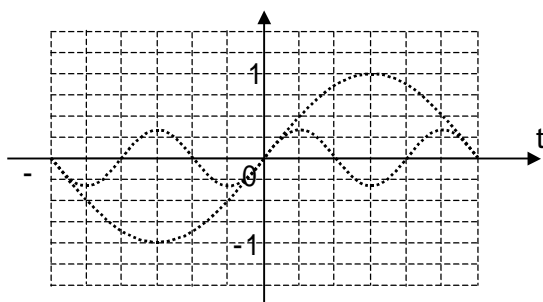
周期  $2\pi$  の任意の波形  $f(t)$  に対して, これを数学的に,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(nt + \theta_n)$$

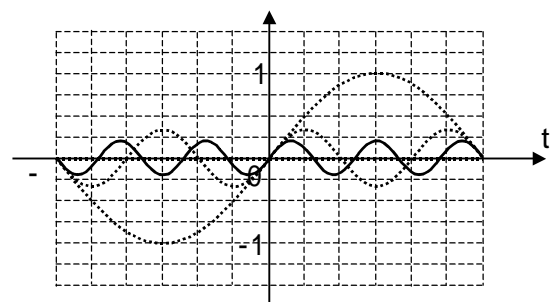
と表現したとき, 成分の大きさである  $c_n$  を求めたい. どのように計算すればよいか?

【関連事項】 グラフィックイコライザ, スペクトラムアナライザ, バンドパスフィルタ

2. 方形波の調波合成 ~ 作図による理解



上図には  $\sin(t)$  と  $\sin(3t)/3$  が示されている。  
同図に両者の和を記入せよ。



上図には  $\sin(t)$  と  $\sin(3t)/3$  と  $\sin(5t)/5$  が示されている。これら3つの和を記入せよ。

-2 フーリエ級数展開の解析的手法 1

3. 周期信号を成分分析する方法 ~ フーリエ級数展開 (教科書 6 章)

2p を一周期とする周期関数 f(t) は、以下の様にフーリエ級数展開される。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right) \right\}$$

このとき、d を任意として、オイラーの係数 (成分の大きさ) は次式で与えられる (p.180-181)。

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_d^{d+2p} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{p} \int_d^{d+2p} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt, \quad b_n = \frac{1}{p} \int_d^{d+2p} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt \quad (n=1,2,\dots)$$

なお、不連続な f(t) には定理 1 (p.182) を適用する。

4. 周期的方形波の成分分析と調波合成

周期が 2π である方形波  $f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$  を

フーリエ級数展開することで、

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right)$$

が得られることを確認しよう。

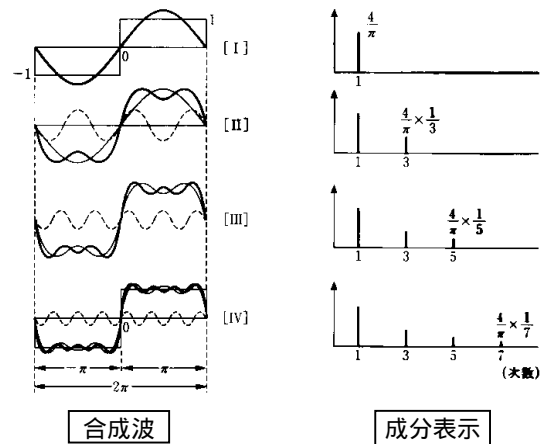


図 2 方形波の調波合成  
講談社「なっとくするフーリエ変換」

5. 練習問題 ~ p.185: 練習問題 1, 5, 11

一周期の区間で次式のように定義される周期関数を

フーリエ級数展開せよ。また、横軸を n, 縦軸を  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  として成分を表示せよ。

問題 1

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \dots & 0 < t < \pi/2 \\ 0 & \dots & \pi/2 < t < 2\pi \end{cases}$$

問題 2

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \dots & 0 < t < 2\pi/3 \\ 1 & \dots & 2\pi/3 < t < 4\pi/3 \\ 0 & \dots & 4\pi/3 < t < 2\pi \end{cases}$$

問題 3

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \dots & -2 < t < -1 \\ 1 & \dots & -1 < t < 0 \\ -1 & \dots & 0 < t < 1 \\ 0 & \dots & 1 < t < 2 \end{cases}$$

(確認)  $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$  ,  $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$

6. 宿題

- ・教科書の 6.2 節をよく読んで、オイラー係数の導出方法を勉強してこること (正規直交とは?)。
- ・上記の練習問題を全て解いてこること。