⑩-1　固有値問題・行列の対角化

１．固有値と固有ベクトル　～　計算手順の確認　（11.2 節 p.503）

N×N の行列[1]　A　に対する**固有値**　$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$　と**固有ベクトル**　$p_1, p_2, \cdots, p_N$　を求めよ。

step.1　$|A-\lambda_i I| = 0$　を満たす固有値 λ_i を求める.　⇒　**特性方程式**[2]を解く

step.2　$(A-\lambda_i I)p_i = O$　を満たす固有ベクトル p_i をみつける。

場合 1：　特性多項式が相異なる実根を持つ場合（＝　固有値が全て異なる）

1）$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$　2）$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　3）$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -7 \\ 7 & -2 & -5 \\ 10 & -4 & -6 \end{pmatrix}$　(p.517 練習問題 1-c)

場合 2：　特性多項式が重根を持つ場合（但し，重根の重複度　＝　固有ベクトルの数[3]）

1）$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$　2）$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$　(p.517 練習問題 1-b)

場合 3：　特性多項式が重根を持つ場合（但し，重根の重複度　＞　固有ベクトルの数）

1）$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　2）$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$　(p.517 練習問題 1-a)

２．行列の対角化　～　固有値問題は何に使える？　…　まずは行列の対角化！

N×N の行列　A　に対し，B を N×N の**対角**行列とする.

問題：　$P^{-1}AP = B$　となる行列　P　を求めよ。　⇒　行列を対角化せよ.

解答：　行列　A　の固有ベクトル $p_1, p_2, \cdots, p_N$，を求め，$P = (p_1\ p_2\ \cdots\ p_N)$ とする.

上記の１.の場合１と場合２について，行列　A　を対角化せよ。

★　但し，場合 3 のときは対角化できないので注意しよう。

---

[1] 「N×M の…」は，ここでは「N 行 M 列の」という意味。
[2] 「固有方程式」とも呼ばれる。
[3] 固有値 λ に対する固有ベクトルの数は，固有空間の次元と呼ばれ，$\dim W_\lambda$ と表される。また，$\dim W_\lambda = N - \mathrm{rank}(A - \lambda I)$ である.

⑩-2　ラダー回路の縦続接続

3．電気回路への応用　～　行列の対角化を電気回路に応用してみる

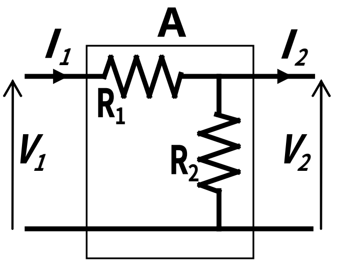

図１

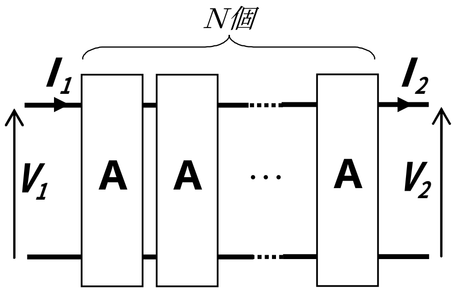

図２

例題　　図２の回路の入出力関係を以下の step1～2 に従って求めよ。

step.1　　図１の回路の入出力関係を $(V_1, I_1)^T = A \cdot (V_2, I_2)^T$ と表せば、　(5/2 の資料)

図２の回路の入出力関係は $(V_1, I_1)^T = A^N \cdot (V_2, I_2)^T$ となる。

step.2　　行列のべき乗 A^N を計算するには、$P^{-1}AP = B$（対角行列）となる P を求めてから、

$A^N = PB^NP^{-1}$ を計算する。何故なら $B^N = (P^{-1}AP)^N = P^{-1}A^NP$ だから。

演習　　$R_1 = 1\,[\Omega]$、$R_2 = 2\,[\Omega]$、として A^N を計算せよ。