⑪-1　直交行列による対称行列の対角化

1．対称行列の対角化　～　行列が対称ならば，直交行列で対角化できる　（教科書 11.3）

★　与えられた**対称**行列 A を対角化する**直交**行列 P を求めることで、行列Aを**対角化**せよ。
　　（$A=A^T$）　　（$P^{-1}=P^T$）

step.1　行列 A に対する固有ベクトル $p_1, p_2, \cdots, p_N$ を求める。

step.2　行列 $P=(p_1\ p_2 \cdots p_N)$ をつくる（$P^{-1}=P^T$ を確認する）。

step.3　行列 $B=P^TAP$ が対角行列となることを示す。

例題１　行列 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ（固有ベクトルは**正規化**[1]すること）。

また、行列 A を対角化する行列 P を求め、$B=P^TAP$ が対角行列となることを示せ。

練習１　次の対称行列を対角化せよ。

（1）$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$　　（2）$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

宿題１　教科書 p.517 の練習問題 1，3 を解いて p.797-798 の解答と照合せよ。

2．シュミットの直交化　～　正規かつ直交な基底の作り方　（教科書 p.484-485）

適当な基底群V_1，V_2，V_3，・・・から、正規かつ直交な基底群U_1，U_2，U_3，・・・を作る方法は、

$$\mathbf{W}_n=\mathbf{V}_n-\sum_{i=1}^{n-1}\langle\mathbf{V}_n,\mathbf{U}_i\rangle\mathbf{U}_i \quad \text{とおくと} \quad \mathbf{U}_n=\frac{\mathbf{W}_n}{\|\mathbf{W}_n\|} \quad \text{但し,} \quad \mathbf{U}_1=\frac{\mathbf{V}_1}{\|\mathbf{V}_1\|}, \quad n=2,3,4,\cdots$$

例題２　直交しないし正規化もされていない２つの基底 $V_1=(2\ 1)^T$，$V_2=(1\ 2)^T$ から、シュミットの直交化により正規直交基底 U_1，U_2 を作れ。また、これらが正規直交であることを示せ。

但し、内積は $<P,Q>=P^TQ$ とする。また，ノルムは，$\|\mathbf{X}\|=\sqrt{\langle\mathbf{X},\mathbf{X}\rangle}$ である.

宿題２　３つの基底$V_1=1$，$V_2=t$，$V_3=t^2$ を元に，正規直交基底 U_1，U_2，U_3を作れ。但し，内積は，

$\langle\mathbf{P},\ \mathbf{Q}\rangle=\int_{-1}^{1}\mathbf{PQ}\ dt$　とする。以上より、ルジャンドル多項式　$P_n=\sqrt{\dfrac{2}{2n-1}}\,U_n$　を求めよ[2]。

---

[1] ベクトル$P=(p_1\ p_2)$を正規化(規格化)する．⇒ $\|\mathbf{P}\|=1$ となるようにする．⇒ $\mathbf{P'}=\mathbf{P}/\|\mathbf{P}\|$ 但し，$\|\mathbf{P}\|=\sqrt{p_1^2+p_2^2}$

[2] 甘利、金谷「理工学者が書いた線形代数」講談社

⑪-2　二次形式と主軸変換

3．二次形式を標準形に変換する　～　二次形式の見通しを良くする　（教科書 11.1 節, p.493-503）

二次形式 $5x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2$ は、 一次変換 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ により、 **標準形**　$8y_1^2+2y_2^2$ と表現できる。	$\Rightarrow$	$\mathbf{X^TAX}$　但し　$\mathbf{X^T}=(x_1\quad x_2)$　は、 $\mathbf{X}=\mathbf{PY}$　但し　$\mathbf{Y^T}=(y_1\quad y_2)$　により、 $\mathbf{Y^TBY}$　但し　$\mathbf{B}$ は対角行列　と表現できる。

ここで、　$B=P^TAP$（対称行列）
何故なら、$X^TAX=(PY)^TA(PY)$
$=Y^T(P^TAP)Y=Y^TBY$

例題３

(1)　$\mathbf{X^T}=(x_1\quad x_2)$として、二次形式を $5x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2\ =\ \mathbf{X^TAX}$ のように行列表現したい。

この場合の行列Aを示せ。但し、$A=A^T$ となるように工夫せよ。

(2)　$\mathbf{Y^T}=(y_1\quad y_2)$として、$\mathbf{X}=\mathbf{PY}$ 但し、$\mathbf{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ を上記の $\mathbf{X^TAX}$ に代入すると、

上記の二次形式が標準型に変換されることを示せ.

演習３　二次形式 $5x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2$ を X^TAX と表現したときの対称行列Aを示せ.

また、一次変換 $\mathbf{X}=\mathbf{PY}$ によりこの二次形式を**標準形**で表現せよ.

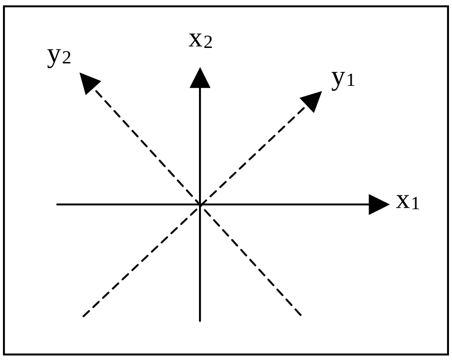
宿題３　教科書 p.502-503 の練習問題 2,5 を解いてみよう。

4．主軸変換　～　二次曲線の形を描く

例題４　二次曲線 $5x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2=8$ の概形を描け。

また，二次曲線の最大値と最小値を調べよ。

ヒント：　標準形にしてから描く【**主軸変換**】[3]。



[3] 甘利俊一・金谷健一，理工学者が書いた数学の本「線形代数」(p.145)など.