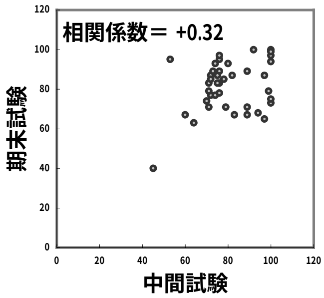
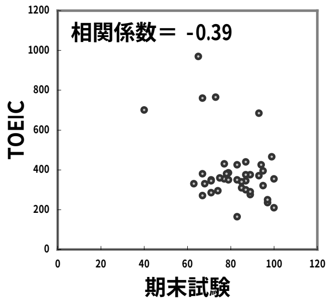
⑫-1　相互相関と主成分分析

１．相互相関 ～ 英語と数学の関係は？ － 「内積」の統計的な意味。

$$\text{相関係数を、} \Theta_{ij} = \frac{\langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \rangle}{\|\mathbf{X}_i\| \cdot \|\mathbf{X}_j\|} \quad \text{と定義する。}$$

$$\text{但し、} \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \rangle = \mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_j, \quad \|\mathbf{X}_i\|^2 = \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i \rangle$$





実例１　昨年度における本学学部３年生４０名について，TOEIC と数学成績の相関図と相関係数を示す。

例題１　数学と物理、数学と英語、物理と英語について、相関図と相関係数をそれぞれ示せ。
但し、学籍番号 n の数学、物理、英語の成績をそれぞれ $x_1(n)$，$x_2(n)$，$x_3(n)$ とする。
また、数学、物理、英語の平均点をそれぞれ $\overline{x}_1$，$\overline{x}_2$，$\overline{x}_3$ として、ベトクル X_i を、
$\mathbf{X}_i = (x_i(1)-\overline{x}_i \quad x_i(2)-\overline{x}_i \quad x_i(3)-\overline{x}_i \quad x_i(4)-\overline{x}_i)^T$，$i=1,2,3$　と定義する。

表１

学籍番号	数　学	物　理	英　語
1	3	3	3
2	3	4	1
3	0	0	1
4	2	1	3

２．主成分分析[1] ～ 固有値問題（対称行列の対角化）を，多変量解析に応用しよう

方法２　相関係数行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix}$ を対角化する。すなわち、固有値問題を解くことで、

$\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\,\mathrm{P}=\mathrm{B}$（対角行列）となる行列 P を求め、$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}$ と変換する.

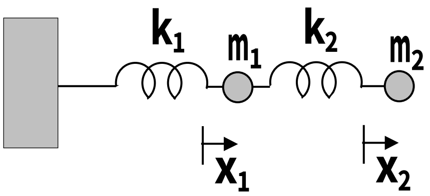
参考２　表１のデータについて，例えば，数学の成績 $x_1(n)$ と英語の成績 $x_2(n)$ を「主成分分析」することで,「総合学力」を表す指標 $y_1(n)$ と,「文系か理系か」の指標 $y_2(n)$ が得られる.
これは,（x_1, x_2）を回転させて（y_1, y_2）に主軸変換することを意味し，そのときの回転角度を主成分分析により決定したことになる.

[1] 講談社「情報量規準による統計解析入門」にはミス･ユニバース日本代表の体形解析の例が、東京図書「すぐわかる多変量解析」には各国の豊かさを解析する例が、それぞれ紹介されている。

⑫-2　微分方程式への応用

３．ばね系の振動　～　力学系の微分方程式への応用　（教科書 11.3）

演習３　以下の手順に従い，時刻 t における質点の位置 $x_1(t)$，$x_2(t)$ を求めよ[2]。
但し，$m_1=2$、$m_2=1$、$k_1=2$、$k_2=1$　とする.



m_1、m_2は、質点の質量
x_1、x_2は、質点の位置
k_1、k_2は、バネ定数

step.1　運動方程式　$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} = -\mathbf{K}\mathbf{X}$　をたてる。　・・・（1）

但し、$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$、$\ddot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$、$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$、$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

step.2　一次変換　$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$　を求める。　・・・（2）

但し、$\begin{cases} \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{P} = \mathbf{B} & \text{（対角行列）} \\ \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{I} & \text{（単位行列）} \end{cases}$

すなわち、　$(\lambda\mathbf{M} - \mathbf{K})\mathbf{p} = \mathbf{O}$　から固有ベクトル p_1，p_2 を求めて　$P = (p_1 \quad p_2)$　とする。
但し、固有ベクトルの大きさは　$P^{\mathrm{T}}MP = I$　となるように正規化する。

step.3　式（２）を式（１）に代入すると微分方程式は容易に解ける。

$$\mathbf{M}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{Y}} = -\mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{Y}$$

すなわち、　$(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{P})\ddot{\mathbf{Y}} = -(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{P})\mathbf{Y}$　なので、

$$\ddot{\mathbf{Y}} = -\mathbf{B}\mathbf{Y}$$

$y_i = c_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$，　$i = 1,2$、　但し、$\mathbf{B} \equiv \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}$　・・・（3）

[2] 甘利、金谷「理工学者が書いた数学の本、線形代数」講談社