

-1 数値計算による成分分析

1. 成分分析の実例 ~ 実体験と結びつけよう!

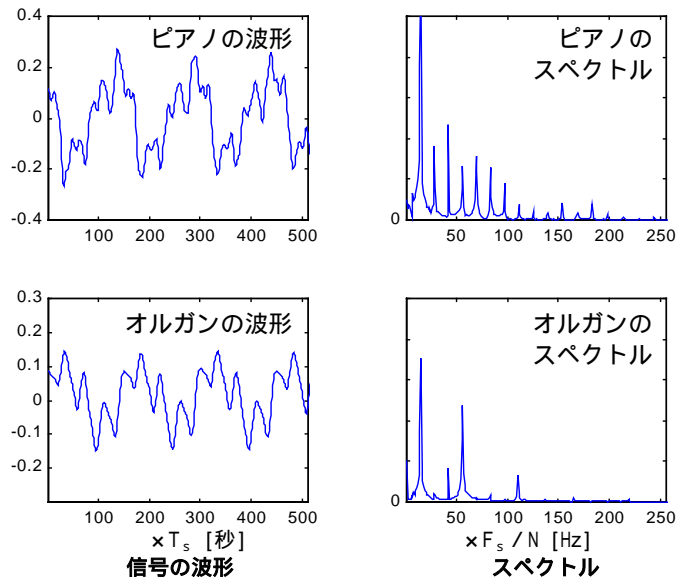
前回学習したオイラーの係数をコンピュータで計算機させるために積分を和に置き換える¹.

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(\frac{-j2\pi}{N}kn\right) \quad (1)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

D F T (Discrete Fourier Transform)

これでは計算回数が N^2 に比例するので遅い。
そこで以下のFFTアルゴリズムを用いる。
結果、計算回数が $N \log_2 N$ に比例するので、
DFTに比べて圧倒的に速く計算結果が得られる。



楽器音の解析結果 FFT データ点数 $N = 2048$.
サンプリング周波数(F_s) = 1/サンプリング周期(T_s) = 44.1kHz.
スペクトル(成分の大きさ) = $|F(k)| = F(k)F(k)^*$.

2. FFT² ~ の式を, 図(signal flow graph)や行列で表現できるように!

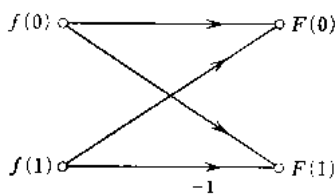


図1 N = 2 のFFT

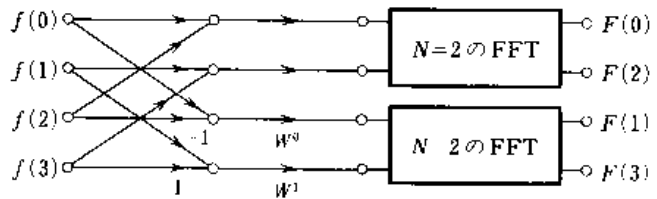


図2 N = 4 のFFT

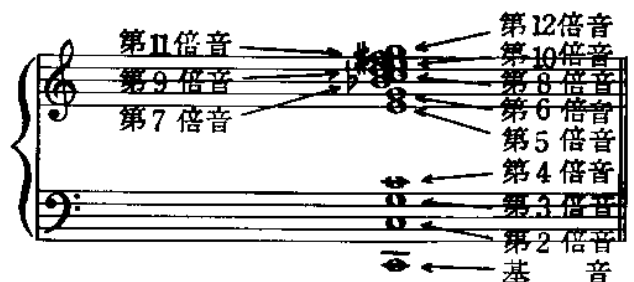
- $N = 2, 4$ の場合, 式(1)のDFT計算は図1, 図2で表現できることを確認しよう.
- 更に図2は, 次式のような行列の積で表現できることを確認しよう.

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(2) \\ F(1) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} \quad (3) \quad (2) \quad (1)$$

但し, $W = \exp\left(\frac{-j2\pi}{N}\right)$
因みに, $\begin{cases} \exp(\pm j\pi) = -1 \\ \exp(\pm j\pi/2) = \pm j \end{cases}$

3. 倍音の音程 ~ 音楽の友社「楽典」より

基本音を「ド」とすると,
2倍音はオクターブ上の「ド」,
3倍音はオクターブ上の「ソ」, ...



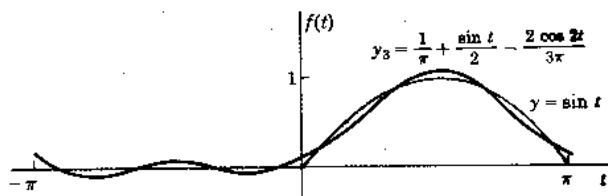
¹ $f(t)$ を離散化して $f(n)$ とする際, N が $f(t)$ の周期の丁度整数倍なら問題ない. さもなければ窓関数を使う.

² Fast Fourier Transform ~ 詳細は専門科目で学習しよう. 佐川, 貴家「高速フーリエ変換とその応用」昭晃堂などを参照.

-2 フーリエ級数展開の解析的手法 2

4. 整流波 ~三角関数の加法定理を使いこなそう!

【問題 4-1】 $f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ \sin t & 0 < t < \pi \end{cases}$ (p.183 例題 1、図 6.3)



$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin t}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2t}{3} + \frac{\cos 4t}{15} + \frac{\cos 6t}{35} + \frac{\cos 8t}{63} \dots \right)$$

結果がこうなることを，教科書を読んで確認しよう。

5. 鋸歯状波 (三角波) ~部分積分を使いこなそう!

【問題 5-1】 $f(t) = \begin{cases} -t & -3 < t < 0 \\ t & 0 < t < 3 \end{cases}$ (p.184 例題 2)

6. 練習と宿題

【問題 4-2】 $f(t) = \sin \frac{t}{2} \quad -\pi < t < \pi$ (p.185 練習問題 3)

【問題 4-3】 $f(t) = \cos t \quad -\pi/2 < t < \pi/2$ (p.185 練習問題 4)

【問題 4-4】 (p.185 練習問題 6)

【問題 4-5】 (p.185 練習問題 13)

【問題 5-2】 $f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ t & 0 < t < \pi \end{cases}$ (p.185 練習問題 2)

【問題 5-3】 $f(t) = t \quad -\pi < t < \pi$ (p.185 練習問題 7)

【問題 5-4】 (p.185 練習問題 12)

(確認 1) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$, $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$

(確認 2) $\begin{cases} 2 \sin x \cdot \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y) \\ 2 \cos x \cdot \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y) \\ 2 \sin x \cdot \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y) \end{cases}$ (加法定理の応用)

(確認 3) $\int f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)] - \int f'(x)g(x)dx + C$ (部分積分)