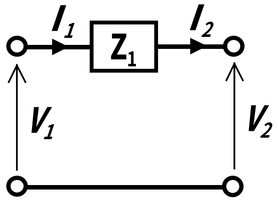
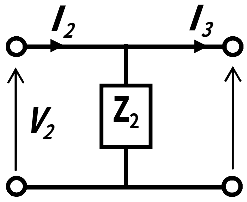
④-1　工学上の問題を行列表現する

1．　二端子対回路 ～ コンピュータで電気回路の特性を調べよう

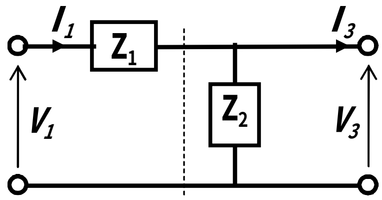
1－1　以下の２端子対回路について、電圧 V_1, V_2, V_3 と電流 I_1, I_2, I_3 の相互の関係を行列表現せよ。但し、Z_1, Z_2 はインピーダンスとする。



$$\begin{pmatrix}V_1\\I_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_2\\I_2\end{pmatrix}$$

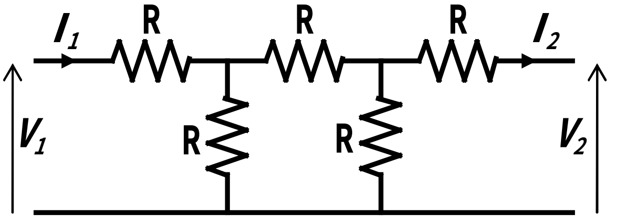


$$\begin{pmatrix}V_2\\I_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_3\\I_3\end{pmatrix}$$



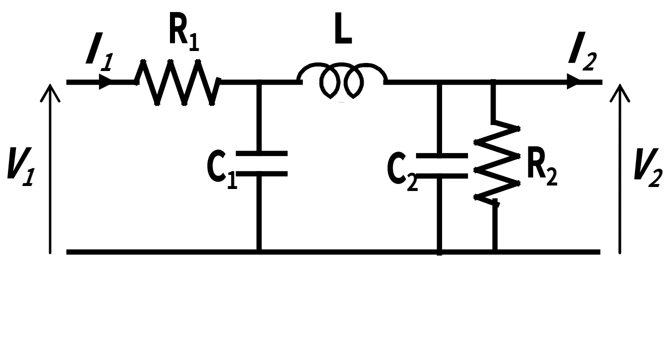
$$\begin{pmatrix}V_1\\I_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_3\\I_3\end{pmatrix}$$

1－2　以下の回路について、電圧と電流の関係を$(V_1, I_1)^T = A\cdot(V_2, I_2)^T$のように行列表現せよ。以上より、出力がオープンと考えられるときの入出力間の電圧の比 V_2 / V_1 を求めよ。



2．　フィルタ回路 ～ 複素インピーダンスを導入して周波数振幅特性を計算しよう

2－1　以下の回路について、電圧と電流の関係を$(V_1, I_1)^T = A\cdot(V_2, I_2)^T$のように行列表現せよ。以上より、出力がオープンと考えられるときのフィルタの周波数振幅特性（入出力間の電圧の大きさの比$|V_2|/|V_1|$）を求めよ。但し、$R_1=R_2=1\Omega$，$L=2H$，$C_1=C_2=1F$ とせよ。



④-2　連立方程式を解析的に解く

3．逆転公式　（p.457,定義 2）

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \\ \vdots & & \end{pmatrix}^{T}$$

・　行列Aの逆行列A^{-1}は、行列式|A|と余因子$\tilde{a}_{ij}$から計算される．
・　A^TはAを転置した（行と列を入れ替えた）もの．
・　余因子$\tilde{a}_{ij}$は、行列Aからｉ行ｊ列を取り除いた行列の行列式．

余因子　（p.430,例題 1）

$$\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{i1} & & a_{ij} & \\ \vdots & & & \ddots\end{vmatrix}$$

行列式の余因子展開　（p.435,例題 2）

$$|\mathbf{A}|=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\tilde{a}_{ij} & j\text{列による展開}\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{a}_{ij} & i\text{行による展開}\end{cases}$$

例題 3-1　逆転公式を用いて連立方程式 A･X＝B の解 X を求めよ（A･Xを計算．Bになるか確認）．

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ -3 & -2 & 1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -4\end{pmatrix}\qquad \mathbf{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

4．行列式の性質　…　を使って楽々計算！　（p.435,例題 2）

・行列式の一つの行における全ての要素に同じ数ｃを掛ければ、その行列式はｃ倍される．　（p.436,定理 6）

・ある行の要素に定数を掛けた行を、他の行の対応する要素に加えても、行列式の値は変わらない．　（p.437,定理 10）

例題 4-1　$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ -3 & -2 & 1\end{vmatrix}$ を計算せよ．

【手順 1】1 行＝1 行＋2 行×2、3 行＝3 行＋2 行×3
【手順 2】行列式を 1 列で展開

5．演習と宿題

問題 5-1　$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}3 & 1 & 5\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}$ を計算せよ．

【手順 1】1 列＝1 列-2 列×3
【手順 2】行列式を 1 列で展開

問題 5-2　$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ とする．逆行列A^{-1}を逆転公式により求めよ（$A\cdot A^{-1}=I$ を確認）．

問題 5-3　連立方程式 $\begin{cases}3x+5y-z=12\\ 2x-y+3z=25\\ x+2y-z=0\end{cases}$ を，逆転公式を使って解け．

問題 5-4　逆転公式によりA^{-1}を求めよ．但し、$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a+1 & 1 & 1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$ とする．（$A\cdot A^{-1}=I$ を確認）．

配布資料は　http://tech.nagaokaut.ac.jp/lecturenote/lecture.htm　から入手可能