⑤-1　連立方程式をコンピュータで解く

教科書(下巻)10.4，10.5 節

１．　行の基本変換

～elementary transformation (10.4 節,p.465,定義 2)

a. 或る行に零でない定数を掛ける。
b. 或る行と、別の或る行を入れ替える.
c. 或る行の各要素の定数倍を、別の或る行の対応する要素に加える.

例題 1-1　$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ の逆行列を求めたい. $\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ として、2 行 4 列の行列　（A ｜ I）をつくり、これに基本変換(例えば以下の step1～4)を適用して A^{-1} を求めよ($A \cdot A^{-1} = I$ を確認のこと).

step1：1 行÷3、step2：2 行=2 行－1 行、step3：2 行=2 行×(-3)、step4：1 行=1 行+2 行×5/3.

例題 1-2　$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ について同様にして A^{-1} を求めよ.

２．　ガウス消去法

～　プログラムを作って連立方程式をコンピュータに解かせよう(p.476,10.5 節)（→PBP).

AX＝B　　但し，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn}\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

ガウス消去法の手順（2 変数の場合）

step.1　$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\end{pmatrix}$　1 行’＝1 行÷(a_{11})

step.2　$\begin{pmatrix}1 & a'_{12} & b'_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\end{pmatrix}$　2 行’＝2 行−(1 行’×a_{21})

step.3　$\begin{pmatrix}1 & a'_{12} & b'_1\\ 0 & a'_{22} & b'_2\end{pmatrix}$　2 行’’＝2 行’÷(a'_{22})

step.4　$\begin{pmatrix}1 & a'_{12} & b'_1\\ 0 & 1 & b''_2\end{pmatrix}$　$x_2 = b''_2$, $x_1 = b'_1 - a'_{12}x_2$

ガウス消去法の手順（3 変数の場合）

step.1　1 行 1 列を 1 に.
step.2　2 行 1 列と 3 行 1 列 0 に.
step.3　2 行 2 列を 1 に.

step.4　3 行 2 列を 0 に (z が求まる)
step.5　z を 2 行に代入 (y が求まる)
step.6　z と y を 1 行に代入.

例題 2-1　以下の拡大マトリクス(p.474)にガウス消去法を適用して連立方程式を解け(検算せよ).

(a) $\begin{cases}3x+3y=6\\ -3x-y=-8\end{cases}$　(b) $\begin{cases}2x+4y=-2\\ x+5y=2\end{cases}$　(c) $\begin{cases}2x-2y+4z=4\\ -2x+4y-3z=2\\ x-2y+\frac{5}{2}z=1\end{cases}$

例題 2-2　教科書 p.478 例題 3 と p.481 例題 4 を読み完全解について学習せよ.

関連　・基本変換の結果，ある行が零になったらどうする(ランク落ち)？　→　最小自乗の意味で最適な逆行列.
・複素数に拡張して電気回路の交流電流を求めるプログラムを作ろう．他にも有限要素法や適応フィルタなど応用は盛沢山!

⑤-2　解の存在、一次独立について（階数の利用）

教科書 10.4

３．行列の階数の計算法

～　基本変換により階段行列を作って階数を調べる.（教科書 10.4 節）

- 行列Ａの**階数** ＝ max{r ｜ 適当なｒ次の小行列式$A_{ij} \neq 0$}.
- **基本変換**を何度繰り返しても，行列の**階数(rank)**は変わらない.（教科書 10.4 節,p.465 定理 2）

例題 3-1　行列 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&2&8\\2&0&5\\0&4&1\end{pmatrix}$ ，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&a\\a&1\end{pmatrix}$ ，$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&1&b\\1&b&1\\b&1&1\end{pmatrix}$ に基本変換を適用して階段行列を作成することで，それぞれの行列の階数(rank)を求めよ.

例題 3-2　教科書 p.470,練習問題 2,3 を解け.

４．　連立方程式の解の存在を調べる

～　階数で何がわかる？　(教科書 10.5 節)

ｎ元連立一次方程式 ＡＸ＝Ｂ の「解の存在」を，拡大マトリクスの階数により調べる.

- 場合　i)　rank(Ａ Ｂ) ＝ rank Ａ ＝ ｎ　⇒　ただ１組の解が存在.
- 場合 ii)　rank(Ａ Ｂ) ＝ rank Ａ ＜ ｎ　⇒　少なくとも１組の解が存在.
- 場合 iii)　rank(Ａ Ｂ) ≠ rank Ａ　⇒　解は存在しない.

例題 4-1　以下のそれぞれの連立方程式について、解の存在を調べよ.

(*a*) $\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$,　(*b*) $\begin{pmatrix}1&-2\\-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$,　(*c*) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

例題 4-2　教科書 p.486,練習問題 9 を解け.

５．　ベクトルが一次独立か否かを調べる

～　階数で何がわかる？　(教科書 10.5)

ｎ個の列ベクトルa_1，a_2，･･･，a_n が一次独立であるとは？

- $c_1a_1+c_2a_2\cdots+c_na_n=0$　が成立するのは，$c_1=c_2\cdots=c_n=0$　のときのみ。
- $\mathrm{rank}(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)=n$　となれば一次独立。　←【階数で調べる方法】

例題 5-1　$a_1=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ とする.

(**1**) a_1，a_2　は一次独立か？　(**2**) a_1，a_2，a_3 は一次独立か？

例題 5-2　教科書 p.485-486 の練習問題 1,2,7,8 を解け.

６．　演習と宿題

このプリントの全ての例題を解け.