

-1 線形予測で明日を予測する

1. 直線回帰 ~ 実験データの整理に使おう (逆行列の計算を応用すると...)

- 問題 1-1** 3つの実験データ $(x_0, y_0)=(0, 1)$, $(x_1, y_1)=(1, 1)$, $(x_2, y_2)=(2, 2)$ が得られた。
これらに直線 $y = a_0 + a_1x$ をあてはめたい。
係数値 a_0, a_1 を次式で求め、実験データとあてはめ直線を図示せよ。

回帰直線
$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{B}) \quad \text{但し, データの数を } N \text{ とすると,}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = (y_0 \ y_1 \ \cdots \ y_{N-1})$$

式(1)

2. 曲線回帰 ~ あてはめの精度を上げるには?

- 問題 1-2** 問題 1-1 の実験データに曲線 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ をあてはめたい。
係数値 a_0, a_1, a_2 を次式で求め、実験データとあてはめ曲線を図示せよ。

- 問題 1-3** 最小自乗法の理論 (教科書 4.6 節, p.123) を勉強して式(2)を導出せよ。

回帰曲線
$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{B}) \quad \text{但し, データの数を } N \text{ とすると,}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{N-1} \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{N-1}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = (y_0 \ y_1 \ \cdots \ y_{N-1})$$

式(2)

3. 宿題 ~ 明日を予測する! (線形予測)

- 演習 1-1** ある実験により以下の4つの実験データが得られた。
 $(x_0, y_0)=(0, 1)$, $(x_1, y_1)=(1, 1)$, $(x_2, y_2)=(2, 2)$, $(x_3, y_3)=(3, 2)$,
実験データとあてはめ直線を図示し、 $x_4=4$ における y の値 (y_4 の予測値) を求めよ。

- 演習 1-2** 正午において、一昨日と昨日の気温は共に摂氏 21 度、今日の気温は摂氏 22 度である。
明日の気温を予測せよ。(回帰直線および回帰曲線により予測して、両者を比較しよう。)

-2 補間多項式

行列で表現された工学的問題を理解できるように！

4. 一次の補間多項式 ~ 実験データの整理 (その2) 教科書 4章 4.6節, p.127-p.140

問題 2-1 2つのデータ $(x_0, y_0)=(0, 1), (x_1, y_1)=(1, 2)$ に対する一次の補間多項式を求めよ。

$n+1$ 点のデータ $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ に対する補間多項式を、

$$y = (P_{n0}(x) \ P_{n1}(x)) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \dots (1) \quad \text{ただし、} \quad (P_{n0}(x) \ P_{n1}(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{2x}{n} \end{pmatrix} \dots (2)$$

とする。このとき、 a_0, a_1 は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{3n}{(n+1)(n+2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n0}(x_0) & P_{n0}(x_1) & \dots & P_{n0}(x_n) \\ P_{n1}(x_0) & P_{n1}(x_1) & \dots & P_{n1}(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \dots (3)$$

5. 二次の補間多項式 ~ あてはめの精度を上げるには？

問題 2-2 3つのデータ $(x_0, y_0)=(0, 1), (x_1, y_1)=(1, 2), (x_2, y_2)=(2, 1)$ への一次ならびに二次の補間多項式を求めよ。

補間多項式を式(1)に代わり、 $y = (P_{n0}(x) \ P_{n1}(x) \ P_{n2}(x)) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \dots (4)$ とする。このとき、

$$a_0, a_1 \text{ は式(3)をそのまま使えばよい。新たに加えた } a_2 \text{ は、} P_{n2}(x) = 1 - \frac{6x}{n} + \frac{6x(x-1)}{n(n-1)} \dots (5)$$

$$\text{として、} \quad a_2 = \frac{5n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} (P_{n2}(x_0) \ P_{n2}(x_1) \ \dots \ P_{n2}(x_n)) \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \dots (6) \text{ により計算する。}$$

6. 宿題 ~ 点と点を結ぶ! (補間多項式)

問題 2-3 表1のデータに対する一次および二次の補間多項式を求めよ。

(教科書 4.6節 p.130-131 例題2を参照)

演習 2-1 p.139, 練習問題6を解け。

演習 2-2 教科書 p.127-130を参照して式(3), (6)を導け。直交性はどの点で有益なのかを研究せよ。

表1

i	x_i	y_i
0	0	0
1	1	0.06
2	2	0.20
3	3	0.6
4	4	0.9