⑨-1　直交基底とその応用　（正規かつ直交な基底，直交行列，ｴﾙﾐｰﾄ行列）

1．直交行列の逆行列は？　～　アダマール変換を例に.

1-1　アダマール変換[1]において利用される以下の行列 $\mathbf{H}_2$， $\mathbf{H}_4$， $\mathbf{H}_8$ について，それぞれの逆行列 $\mathbf{H}_2^{-1}$， $\mathbf{H}_4^{-1}$， $\mathbf{H}_8^{-1}$ を求めよ.

$$\mathbf{H}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad \mathbf{H}_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2\\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2\end{pmatrix},\quad \mathbf{H}_8=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathbf{H}_4 & \mathbf{H}_4\\ \mathbf{H}_4 & -\mathbf{H}_4\end{pmatrix},\quad \cdots$$

2．正規かつ直交な基底とは？　～　基底の内積を調べよう.（教科書 p.484　直交化）

2-1　上記の行列 $\mathbf{H}_N$,(N=2,4,8,⋯,)を，列ベクトル $\mathbf{V}_n$,(n=1,2,3,⋯,N)，により以下のように表す. ここで， $\mathbf{V}_n$ は「基底」と呼ばれる．基底 $\mathbf{V}_n$ が「正規かつ直交」であるか否かについて調べよ. 但し，2 つの基底 $\mathbf{V}_n$ と $\mathbf{V}_m$ の内積 $\langle \mathbf{V}_n, \mathbf{V}_m\rangle$ は，この場合， $\langle \mathbf{V}_n, \mathbf{V}_m\rangle = \mathbf{V}_n^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}_m$　と定義する[2].

$$\mathbf{H}_N=\begin{pmatrix}\mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \cdots & \mathbf{V}_N\end{pmatrix}$$

2-2　以上より，直交行列 $\mathbf{H}_N$ の逆行列 $\mathbf{H}_N^{-1}$ が，行列 $\mathbf{H}_N$ の転置 $\mathbf{H}_N^{\mathrm{T}}$ に等しいことを確かめよ.

2*．エルミート行列の逆行列は？　～　複素数に拡張してみよう.

2-3　離散フーリエ変換において利用される以下の行列 $\mathbf{F}_4$ について，行列 $\mathbf{F}_4$ の逆行列 $\mathbf{F}_4^{-1}$ が，行列 $\mathbf{F}_4$ の複素共役の転置 $\overline{\mathbf{F}}_4^{-1}$ に等しいことを確認せよ.

$$\mathbf{F}_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & W^1 & W^2 & W^3\\ 1 & W^2 & W^4 & W^6\\ 1 & W^3 & W^6 & W^9\end{pmatrix},\quad 但し、\quad W=\exp\left(\frac{\pi}{2}j\right)$$

まとめ

・成分が実数である正方行列 $\mathbf{H}$ が，直交行列である.　⇔　$\mathbf{H}^{-1}=\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$　（転置）

・成分が複素数である正方行列 $\mathbf{H}$ が，ｴﾙﾐｰﾄ行列である.　⇔　$\mathbf{H}^{-1}=\overline{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}}$　（複素共役の転置）

---

[1] アダマール変換, フーリエ変換(DFT), 離散コサイン変換(DCT)は全て直交変換の一種である. 長橋宏「信号画像処理」昭晃堂などを参照.

[2] <aX＋bY,Z>＝a<X,Z>＋b<Y,Z>, <X,Y>=<Y,X>, <X,X>≧0 を満たすならば, 内積<X,Y>はどのように定義しても良い.

⑨-2　直交基底とその応用　（情報圧縮，ｼｭﾐｯﾄの直交化，ﾙｼﾞｬﾝﾄﾞﾙ多項式）

３．基底ベクトルによる信号の展開　～　線形信号処理の要

3-1　N 元の列ベクトル $\mathbf{X}_N$ として与えられたディジタル信号を，前ページの行列 $\mathbf{H}_N$ における基底 $\mathbf{V}_i$ ，(i=1,2,3,…,N)，を用いて，次式により成分に分解する.

$$\mathbf{X}_N = \sum_{i=1}^{N} y_i \mathbf{V}_i \qquad \text{すなわち，} \qquad \mathbf{X}_N = \mathbf{H}_N \cdot \mathbf{Y}$$

以下の例１と例２に対して，基底成分の大きさ y_i ，(i=0,1,･･･,N-1) をそれぞれ求めよ。

例１　$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{\sqrt{2}} & \dfrac{9}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$　　例２　$\mathbf{X}_4 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T$

結論　⇒　$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{pmatrix}^T$，　$\mathbf{H}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \cdots & \mathbf{V}_N \end{pmatrix}$　とおくと，$\mathbf{Y} = \mathbf{H}_N^T \cdot \mathbf{X}_N$

４．直交行列により情報を圧縮する！　～　MP3 や DVD など

信号 $\mathbf{X}_N$ に代わりに，基底成分の大きさ $\mathbf{Y}$ を送信／蓄積する。但し，$\mathbf{Y}$ の一部を密かに省略する.
これでデータ量を圧縮できる！　解凍するときは基底と成分の大きさを掛ければ良い.

4-1　例２において，一番小さい成分 y_2 を省略する（圧縮完了）. その後，解凍してみよう.

５．シュミットの直交化　～　正規直交基底の作り方（教科書 p.484-485）

適当な基底群 V_1，V_2，V_3，･･･から、正規かつ直交な基底群 U_1，U_2，U_3，･･･を作る方法は、n=2,3,4,･･･，として、

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{V}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \mathbf{V}_n, \mathbf{U}_i \rangle \mathbf{U}_i \quad \text{とおくと} \quad \mathbf{U}_n = \frac{\mathbf{W}_n}{\|\mathbf{W}_n\|} \quad \text{但し，} \quad \mathbf{U}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\|\mathbf{V}_1\|}$$

5-1　直交しないし正規化もされていない２つの基底 $V_1=(2\ 1)^T$，$V_2=(1\ 2)^T$ から、シュミットの直交化により正規直交基底 U_1，U_2 を作れ。また、これらが正規直交であることを示せ。
但し、内積は $\langle P, Q \rangle = P^T Q$ とする。また，ノルムは，$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle}$ である.

5-2　教科書 p.486 の練習問題 20 を解け。

5-3　３つの基底 $V_1=1$，$V_2=t$，$V_3=t^2$ を元にして正規直交基底 U_1，U_2，U_3 を作れ。但し，内積は、
$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathbf{PQ}\ dt$　とする。以上より、ルジャンドル多項式　$P_n = \sqrt{\dfrac{2}{2n-1}}\, U_n$　を求めよ[3]。

[3] 甘利、金谷「理工学者が書いた線形代数」講談社