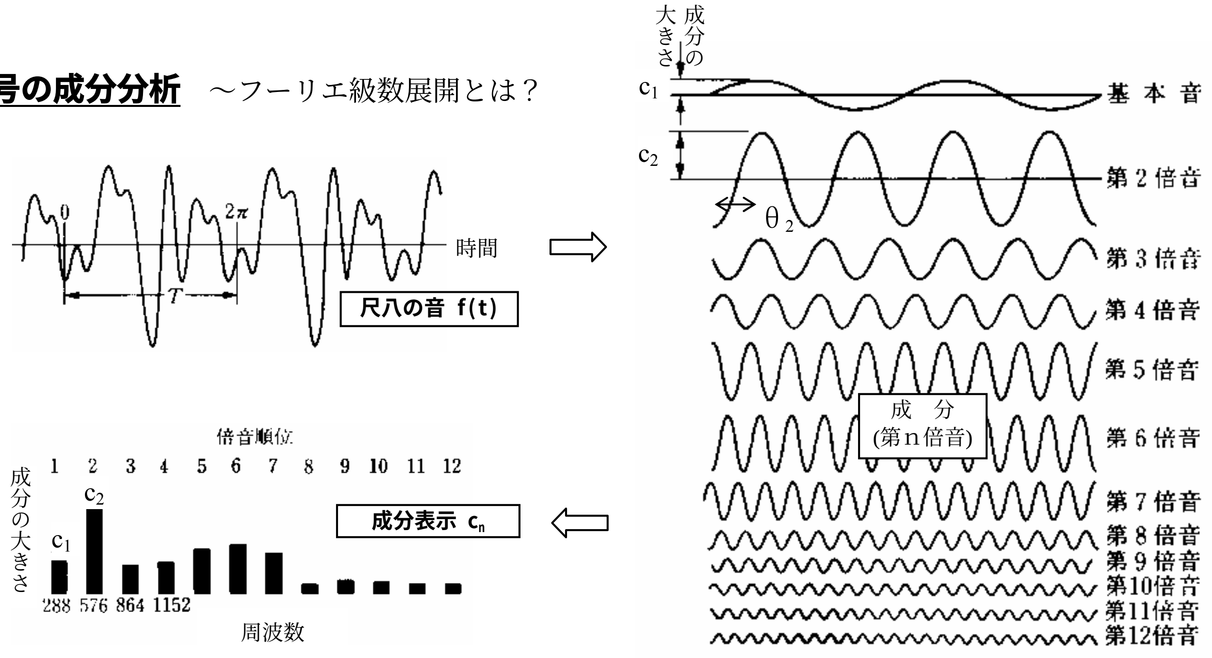
①-A　直交基底とフーリエ級数展開

1．信号の成分分析　～フーリエ級数展開とは？



講談社「なっとくするフーリエ変換」から

上図に示されるように、音程の定まった定常的な音信号は、様々な大きさの成分（倍音）により構成されている．任意の信号f(t)から、それぞれの成分の大きさc_n ,n=1,2,3,･･･ を求めよう。

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 t+\theta_n) \quad , \text{ 但し、} \omega_0=\frac{2\pi}{T} \qquad \cdots(1)$$

2．周期信号を成分分析する方法　～フーリエ級数展開　(H.P.スウ、フーリエ解析、1.4節)

一周期が Tである信号 $f(t)$は、以下の様にフーリエ級数展開される。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{ a_n \cos(n\omega_0 t)+b_n \sin(n\omega_0 t)\right\} \quad , \text{ 但し、} \omega_0=\frac{2\pi}{T} \qquad \cdots(2)$$

このとき、フーリエ係数（成分の大きさ）は次式で計算できる。

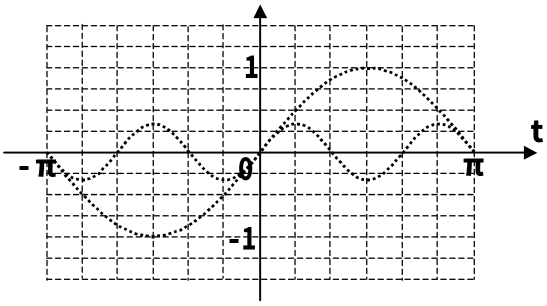
$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \qquad \text{(直流成分)} \qquad \cdots(3)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad \text{(偶対称成分)} \qquad \cdots(4)$$

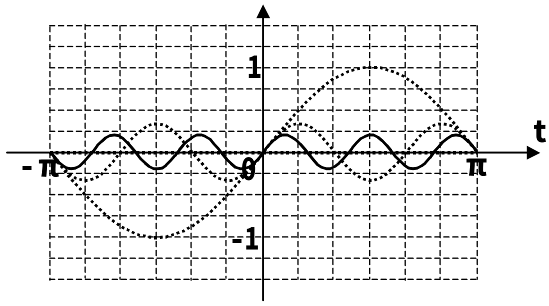
$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad \text{(奇対称成分)} \qquad \cdots(5)$$

①-B　直交基底とフーリエ級数展開

3．方形波の調波合成　～作図による理解



上図には sin(t)と sin(3t)/3 が示されている。同図に両者の和を記入せよ。また、成分を表示する図をかけ。



上図には sin(t)と sin(3t)/3 と sin(5t)/5 が示されている。これら3つの和を記入せよ．また、成分を表示する図をかけ。

4．周期的方形波の成分分析

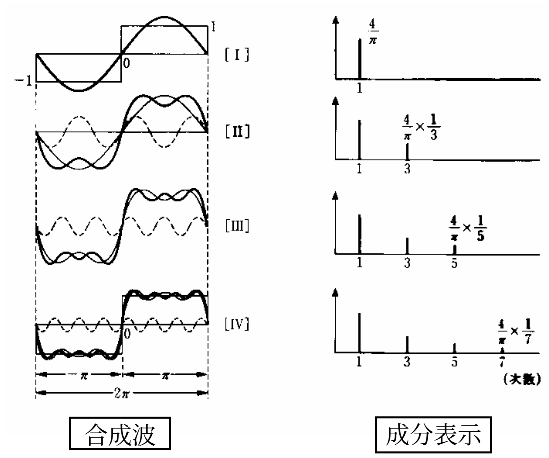
周期が2πである方形波 $f(t)=\begin{cases}-1 & (-\pi<t<0)\\ 1 & (0<t<\pi)\end{cases}$ を

フーリエ級数展開することで,

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\cdots\right)$$

が得られることを確認しよう.

*　不連続関数についてはDirichletの定理
　(工業数学(上)の6.2やフーリエ解析の付録Aなど)



方形波の調波合成

講談社「なっとくするフーリエ変換」

5．演習

（1）上記4.の$f(t)$を式(3)に代入し、積分を計算して、$a_0=0$となることを確認せよ。

（2）上記4.の$f(t)$を式(4)に代入し、積分を計算して、$a_n=0, n=1,2,\cdots,$となることを確認せよ。

（3）上記4.の$f(t)$を式(5)に代入し、積分を計算して、$n=1,2,\cdots,7$に対するb_nを求めよ。

（4）横軸を n, 縦軸を $|c_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ として成分を図示せよ.

（5）以上の結果を式（2）に代入することで、上記4.の $f(t)$をフーリエ級数展開せよ。

(確認)　$\int \sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$　,　$\int \cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$