②-A　いろいろな波形のフーリエ係数

１．フーリエ係数の決定　～【宿題】教科書 1.4 を復習すること

周期が T である信号 $f(t)$ は、以下の様にフーリエ級数展開される。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right\} \quad , \quad \text{但し、} \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{式（１）}$$

このとき、フーリエ係数（成分の大きさ）は次式で計算できる。

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\ dt & (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\ dt & (n = 1,2,\cdots) \end{cases} \qquad \text{式（２）}$$

２．代表的な周期波のフーリエ級数展開　～【宿題】教科書、問題 1.10-1.13 を復習すること

(A) 周期が２πである以下の周期関数 $f(t)$ の時間波形を図示せよ。

(B) フーリエ級数展開した結果を見て、横軸を n, 縦軸を $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ として成分表示せよ.

(C) 式(1),(2)によりフーリエ係数を計算して $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ。

（１）方形波

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \cdots & -\pi < t < 0 \\ 1 & \cdots & 0 < t < \pi \end{cases}$$

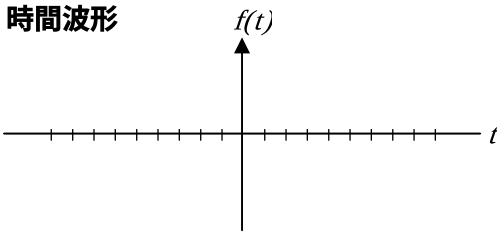
$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt$$

（２）三角波

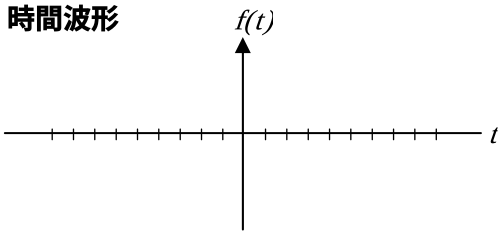
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} t + 1 & \cdots & -\pi < t \le 0 \\ \dfrac{-2}{\pi} t + 1 & \cdots & 0 \le t < \pi \end{cases} \qquad \leftarrow\text{時間波形}$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nt \qquad \leftarrow\text{フーリエ級数展開}$$

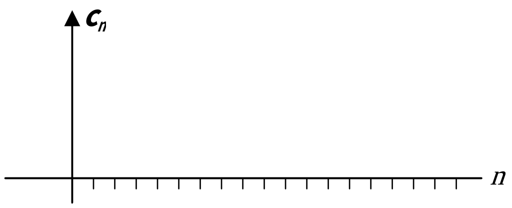
時間波形



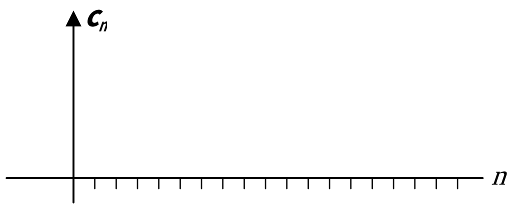
時間波形



成分表示



成分表示



②-B　フーリエ級数の微分および積分

3．波形の定数倍

以下の 2 つの波形（1）, (2) について、それぞれを図示せよ。また、それらのフーリエ係数 a_n と b_n を示せ。

（1）　$f(t)=\begin{cases}-1 & \cdots \quad \dfrac{-T}{2}<t<0 \\ 1 & \cdots \quad 0<t<\dfrac{T}{2}\end{cases}$　　（2）　$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2A}{T} & \cdots \quad \dfrac{-T}{2}<t<0 \\ \dfrac{-2A}{T} & \cdots \quad 0<t<\dfrac{T}{2}\end{cases}$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=odd}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_0 t\ ,\qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

4．フーリエ級数の微分　～【宿題】教科書、問題 1.20-1.21 を復習すること

・周期波形 $g(t)$ の微分波形を $g'(t)$ とする。

・$g(t)$ のフーリエ係数を、a_n および b_n とする。

・$g'(t)$ のフーリエ係数を、a'_n および b'_n とする。このとき、$\boxed{a'_n=n\omega_0\cdot b_n \quad b'_n=-n\omega_0\cdot a_n}$

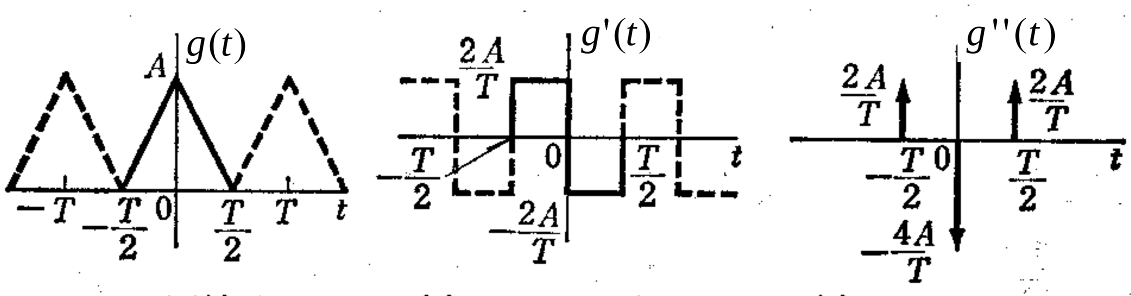
　このことを証明せよ。

5．演習

・　下図(b)に示される $g'(t)$ のフーリエ係数は上記 3.の(2) で与えられる。

・　下図(a)に示される $g(t)$ を微分すると上記 $g'(t)$ となる。

・　上記 4.の関係を用いて $g(t)$ のフーリエ係数を求めよ。答え　$a_n=\begin{cases}0 & ,\ n\in even \\ \dfrac{4A}{\pi^2 n^2} & ,\ n\in odd\end{cases}$，　$b_n=0$ ．



(a) 原波形　　(b) 一回微分波形　　(c) 二回微分波形

達成目標

1．　フーリエ級数展開を理解し、代表的な信号波形を展開できる。