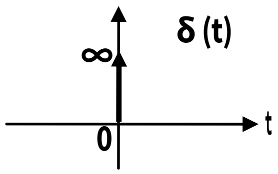
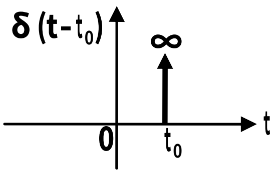
④-A　インパルス関数と不連続周期関数

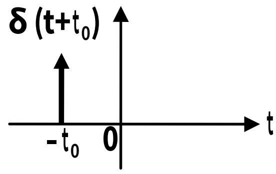
１．デルタ関数の定義

教科書 2.4【宿題】問題 2.20 を解け。

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & , \quad t=0\\ \infty & , \quad t\neq 0\end{cases}\qquad\qquad \delta(t-t_0)=\begin{cases}0 & , \quad t=t_0\\ \infty & , \quad t\neq t_0\end{cases}$$



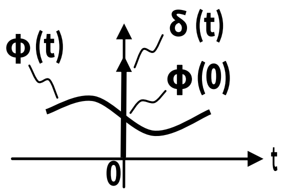


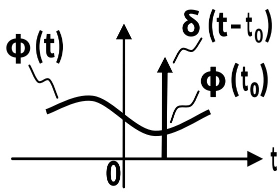


$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

２．デルタ関数とテスト関数

教科書 2.4【宿題】問題 2.21 を解け。





$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt=\phi(0)\qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\phi(t)dt=\phi(t_0)$$

練習問題

（1）　$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\sin n\omega_0 t dt$

（2）　$\int_{0}^{T/2}\frac{-4A}{T}\delta(t-\frac{d}{2})\sin n\omega_0 t dt \quad , \quad 0<d<T$

（3）

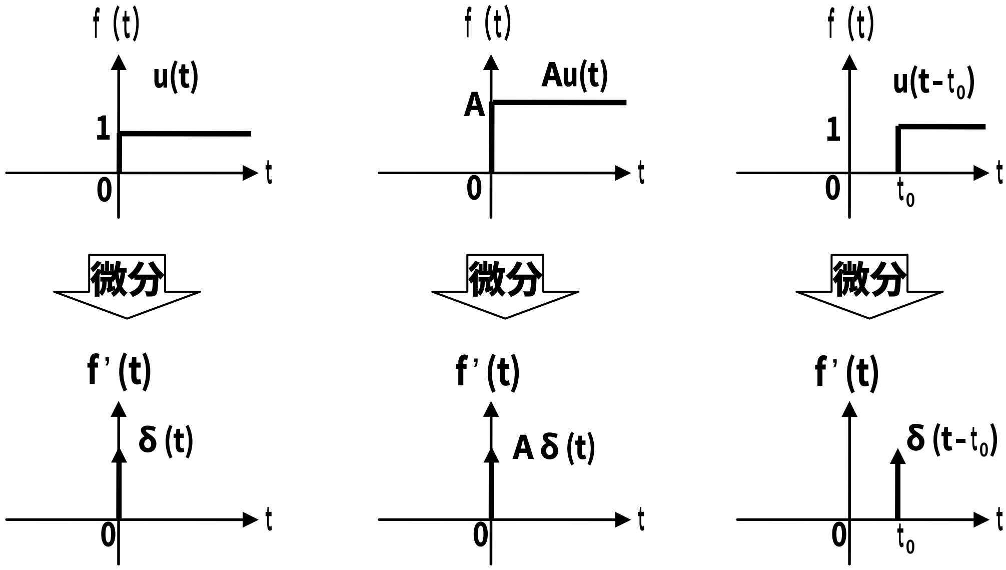
$\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2}f(t)\cos n\omega_0 t dt$　　但し、

$f(t)=\delta(t-d_2)-\delta(t-d_1) \quad , \quad 0<d_1,d_2<\frac{T}{2}$

④-B インパルス関数と不連続周期関数

３．ユニット関数とその微分

教科書 2.4【宿題】問題 2.27



４．微分によるフーリエ係数の決定

教科書 2.6【宿題】問題 2.31，2.33

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\ a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\ \right\}\quad ,\quad 但し、\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\ \alpha_n\cos(n\omega_0 t)+\beta_n\sin(n\omega_0 t)\ \right\}\quad ,\quad このとき、\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & n\omega_0\\ -n\omega_0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$$

練習問題

周期がTである右図の関数のフーリエ係数 a_n, b_n を以下の手順で求めよ。

1） $f(t)$ の微分である $f'(t)$ をδ関数で表現せよ。

2） $f'(t)$ のフーリエ係数 α_n, β_n を次式で計算せよ。

$$\begin{cases}\alpha_n=0, & n=0,1,2,\cdots\\ \beta_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\ dt, & n=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

3）元の関数 $f(t)$ のフーリエ係数 a_n, b_n を次式で計算せよ。

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & n\omega_0\\ -n\omega_0 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}\quad ,\ \text{n=1,2,3,}\cdots$$

4） a_0 を $f(t)$ の平均値から求め、 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ。