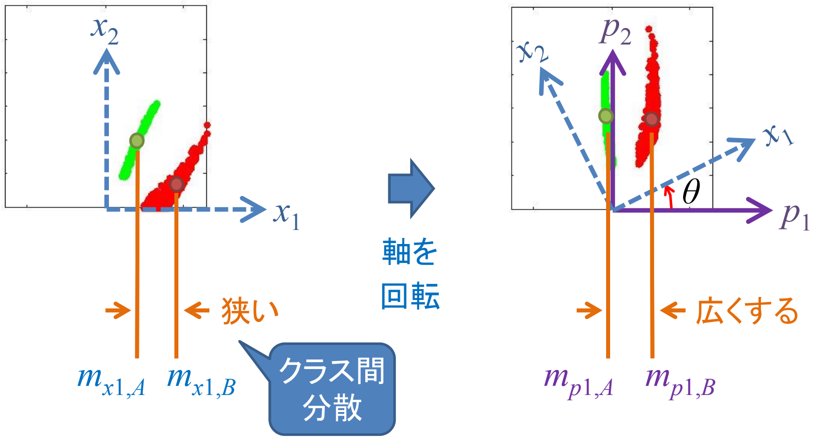
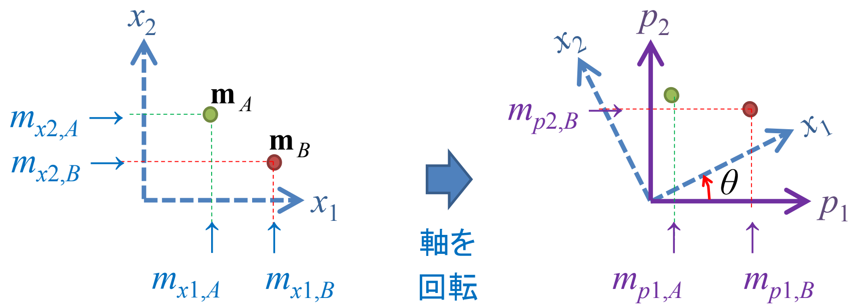
問題1　クラス間分散



クラス間分散を
最大化する θ は？

問題1　クラス間分散



$$\begin{bmatrix} p_{1,c}(n) \\ p_{2,c}(n) \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\theta) \begin{bmatrix} x_{1,c}(n) \\ x_{2,c}(n) \end{bmatrix}, \quad c \in \{A, B\}$$

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

クラス間分散

$$\left(m_{p1,A} - m_{p1,B}\right)^2$$

を最大化するθは？

問題1

各クラスの平均

$$\mathbf{m}_{\mathbf{x},c} = \begin{bmatrix} m_{x1,c} \\ m_{x2,c} \end{bmatrix}, \quad c \in \{A, B\}$$

は軸を

$$\begin{bmatrix} p_{1,c}(n) \\ p_{2,c}(n) \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\theta) \begin{bmatrix} x_{1,c}(n) \\ x_{2,c}(n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

と回転することで

$$\mathbf{m}_{\mathbf{p},c} = \begin{bmatrix} m_{p1,A} \\ m_{p2,A} \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{m}_{\mathbf{x},c}, \quad c \in \{A, B\}$$

となる。「**クラス間分散**」 $\left(m_{p1,A} - m_{p1,B}\right)^2$ を**最大**とする θ を求めよ。

問題1の解答例

クラス間分散は

$$\sum_{Btw} = \left(m_{p1,A} - m_{p1,B}\right)^2 \tag{1}$$

但し、

$$\begin{cases} m_{p1,A} = m_{x1,A}\cos\theta - m_{x1,A}\sin\theta \\ m_{p1,B} = m_{x1,B}\cos\theta - m_{x1,B}\sin\theta \end{cases} \tag{2}$$

である。このとき、

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{Btw} = 2\left(m_{p1,A} - m_{p1,B}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(m_{p1,A} - m_{p1,B}\right) = 0 \tag{3}$$

を満たす θ を求めればよい。

問題1の解答例

(2)より

$$
\begin{aligned}
&m_{p1,A}-m_{p1,B}\\
&=(m_{x1,A}\cos\theta-m_{x2,A}\sin\theta)-(m_{x1,B}\cos\theta-m_{x2,B}\sin\theta)\\
&=(m_{x1,A}-m_{x1,B})\cos\theta-(m_{x2,A}-m_{x2,B})\sin\theta
\end{aligned}
$$

であり、

$$
\begin{cases}
\left(m_{p1,A}-m_{p1,B}\right)= \Delta m_{x1}\cos\theta-\Delta m_{x2}\sin\theta\\
\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(m_{p1,A}-m_{p1,B}\right)=-\Delta m_{x1}\sin\theta-\Delta m_{x2}\cos\theta
\end{cases}
$$

なので、(3)より、

$$
(\Delta m_{x1}\cos\theta-\Delta m_{x2}\sin\theta)(\Delta m_{x1}\sin\theta+\Delta m_{x2}\cos\theta)=0
$$

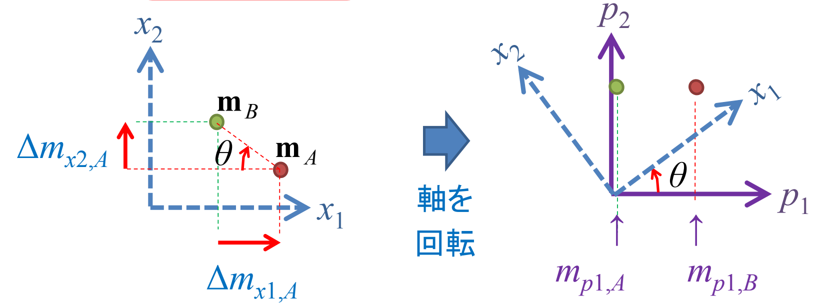
問題1の解答例

以上より

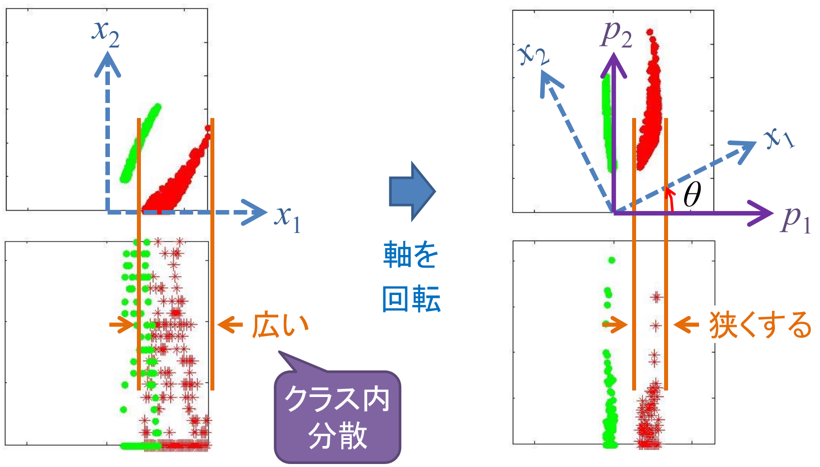
$$
\Delta m_{x1}\cos\theta-\Delta m_{x2}\sin\theta=0 \quad or \quad \Delta m_{x1}\sin\theta+\Delta m_{x2}\cos\theta=0
$$

すなわち、 $\tan\theta = -\dfrac{\Delta m_{x2}}{\Delta m_{x1}}$ or $\dfrac{\Delta m_{x1}}{\Delta m_{x2}}$

のとき、 最大 or 最小

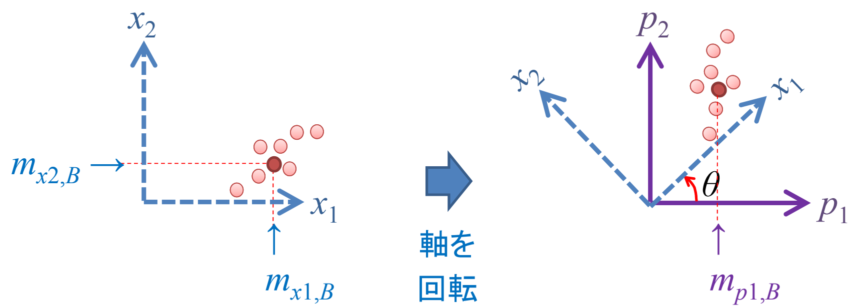


問題2　クラス内分散



クラス内分散を
最小化する θ は？

問題2　クラス内分散



$$
\begin{bmatrix} p_{1,c}(n) \\ p_{2,c}(n) \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\theta)\begin{bmatrix} x_{1,c}(n) \\ x_{2,c}(n) \end{bmatrix}, \quad c\in\{A,B\}
$$

$$
\mathbf{R}(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},
$$

クラス内分散

$$
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(p_{1,B}(n)-m_{p1,B}\right)^2
$$

を最小化する θ は？

問題2の解答例

クラス内分散は

$$I=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(p_{1,B}(n)-m_{p1,B}\right)^2$$

但し、

$$\begin{cases} p_{1,B}(n)= & x_{1,B}(n)\cos\theta-x_{2,B}(n)\sin\theta \\ m_{p1,B} = & m_{x1,B}\cos\theta-m_{x2,B}\sin\theta \end{cases}$$

において、以下の方程式を満たす θ を求める。

$$\frac{\partial I}{\partial\theta}=0$$

問題2の解答例

方程式は、

$$\frac{\partial I}{\partial\theta}=\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(p_{1,B}(n)-m_{p1,B}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(p_{1,B}(n)-m_{p1,B}\right)=0$$

ここで、

$$\begin{cases} p_{1,B}(n)-m_{p1,B} = \tilde{x}_{1,B}(n)\cos\theta-\tilde{x}_{2,B}(n)\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(p_{1,B}(n)-m_{p1,B}\right)=-\tilde{x}_{1,B}(n)\sin\theta-\tilde{x}_{2,B}(n)\cos\theta \end{cases}$$

但し、

$$\begin{cases} \tilde{x}_{1,B}(n)=x_{1,B}(n)-m_{x1,B} \\ \tilde{x}_{2,B}(n)=x_{2,B}(n)-m_{x2,B} \end{cases}$$

問題2の解答例

以上より、

$$\sum\left(\tilde{x}_{1,B}(n)\cos\theta-\tilde{x}_{2,B}(n)\sin\theta\right)\left(\tilde{x}_{1,B}(n)\sin\theta+\tilde{x}_{2,B}(n)\cos\theta\right)=0$$

$$\sum\left(\left(\tilde{x}_{1,B}^2(n)-\tilde{x}_{2,B}^2(n)\right)\cos\theta\sin\theta+\tilde{x}_{1,B}(n)\tilde{x}_{2,B}(n)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\right)=0$$

$$\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{\sum\tilde{x}_{1,B}^2(n)-\sum\tilde{x}_{2,B}^2(n)}{\sum\tilde{x}_{1,B}(n)\tilde{x}_{2,B}(n)}$$

$$\tan\theta-\frac{1}{\tan\theta}=\frac{R_{11}-R_{22}}{R_{12}}=\eta$$

$$\tan^2\theta-\eta\tan\theta-1=0$$

なので、

$$\tan\theta=\frac{\eta\pm\sqrt{4+\eta^2}}{2},\quad \eta=\frac{R_{11}-R_{22}}{R_{12}},\quad R_{12}\neq 0$$

問題2の解答例

とくに、

【場合1】

$$\sum\tilde{x}_{1,B}(n)\tilde{x}_{2,B}(n)=0\quad \text{ならば、}$$

$$\left(\sum\tilde{x}_{1,B}^2(n)-\sum\tilde{x}_{2,B}^2(n)\right)\cos\theta\sin\theta=0$$

$$\theta=0\quad or\quad \pi/2$$

$x_1(n)$ と $x_2(n)$ が無相関のとき、0°回転か、90°回転

あるいは、

【場合2】

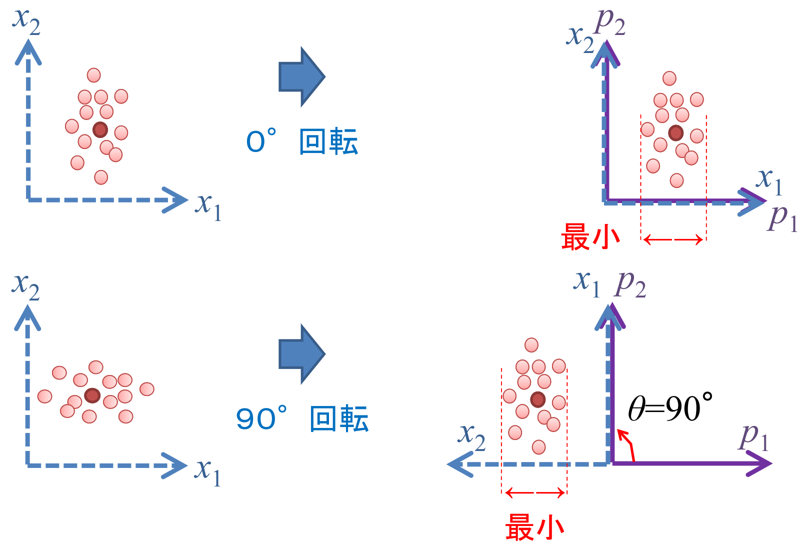
$$\sum\tilde{x}_{1,B}^2(n)=\sum\tilde{x}_{2,B}^2(n)\quad \text{ならば、}$$

$$(\tan\theta-1)(\tan\theta+1)=0$$

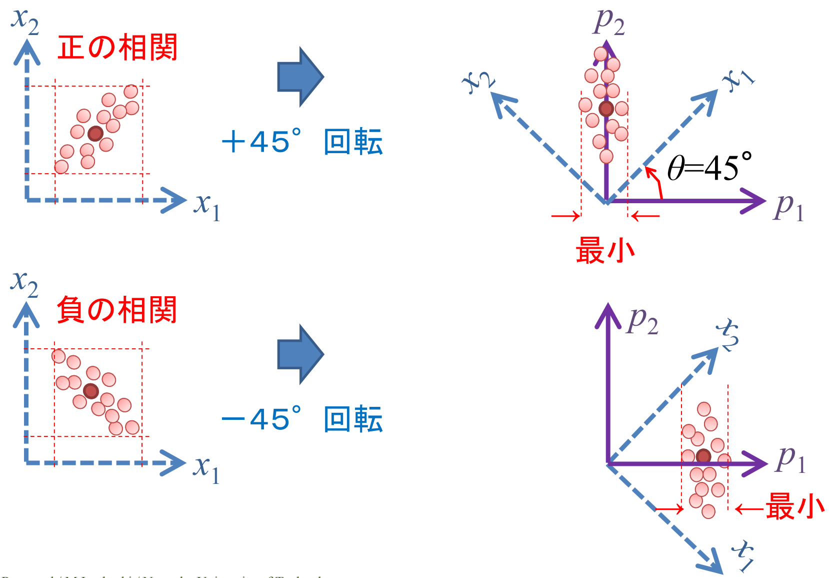
$$\theta=\pi/4\quad or\quad -\pi/4$$

$x_1(n)$ と $x_2(n)$ の分散が同じとして、$x_1(n)$ と $x_2(n)$ に
正の相関があれば ＋45°回転して
負の相関があれば －45°回転する

【場合1】x_1とx_2が無相関のとき



【場合2】x_1とx_2の分散が同じとき



クラス間分散　と　クラス内分散