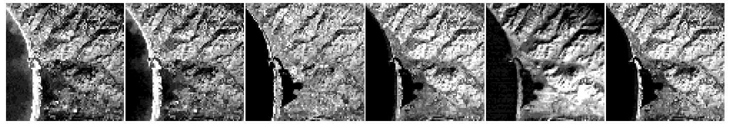
主成分分析

(Principal Component Analysis)

で情報を集約する

【マルチスペクトル画像】

PCAが 情報を 集約する



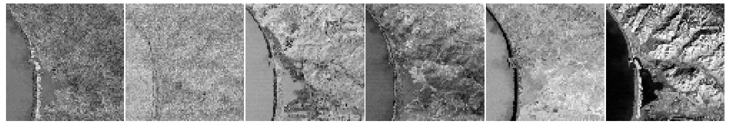
69.68　77.97　85.73　96.71　100　98.18　←分散の比率

画像：NASA

PCAなし

PCAあり

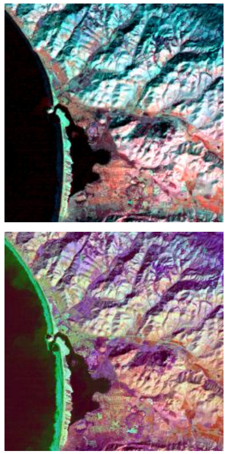
除去できる　一部に集約



0.24　0.35　4.63　7.65　13.09　100

最大を255, 最小を 0
に正規化して表示

3つの成分から画像を再生した



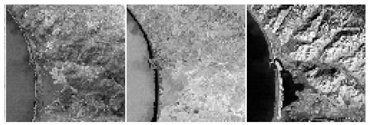
96.71　100　98.18　←分散の比率

画像
NASA

PCAなし

PCAあり

情報の
損失が
少ない



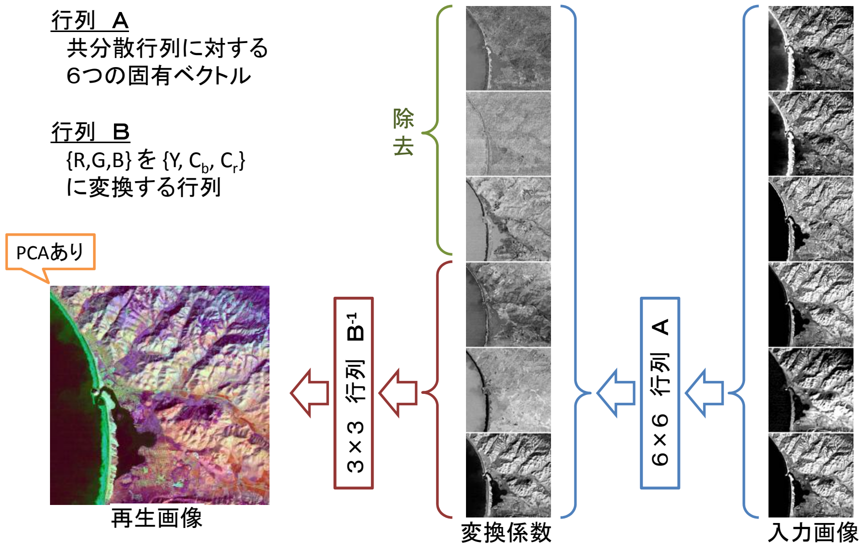
7.65　13.09　100

最大を255, 最小を 0
に正規化して表示

信号処理の手順

行列 A
共分散行列に対する
6つの固有ベクトル

行列 B
{R,G,B} を {Y, C_b, C_r}
に変換する行列



MATLAB Program

```
clear all; close all;
Fn1='C:¥Users¥iwa¥岩橋¥研究室¥ソフトウェア¥標準画像¥multispectram¥';
%---------------------------------------
xx=imread(strcat(Fn1,'Fig1_8.gif'),'gif');
                [N1 N2]=size(xx); X0(1:N1,1:N2,1)=NrmImg(double(xx));
 xx=imread(strcat(Fn1,'Fig1_9.gif') ,'gif'); X0(1:N1,1:N2,2)=NrmImg(double(xx));
 xx=imread(strcat(Fn1,'Fig1_10.gif'),'gif'); X0(1:N1,1:N2,3)=NrmImg(double(xx));
 xx=imread(strcat(Fn1,'Fig1_11.gif'),'gif'); X0(1:N1,1:N2,4)=NrmImg(double(xx));
 xx=imread(strcat(Fn1,'Fig1_12.gif'),'gif'); X0(1:N1,1:N2,5)=NrmImg(double(xx));
 xx=imread(strcat(Fn1,'Fig1_13.gif'),'gif'); X0(1:N1,1:N2,6)=NrmImg(double(xx));
%---------------------------------------
 for i=1:6;
   Y0(i,1:N1*N2)=reshape(X0(1:N1,1:N2,i),1,N1*N2);
 end;
%---------------------------------------
 Av=mean(Y0');
 for i=1:6; for j=1:6;
   S(i,j)=(Y0(i,:)-Av(i))*(Y0(j,:)-Av(j))';
 end; end; S=S/(N1*N2-1);
 for i=1:6; V(1,i)=S(i,i); end; V=V/max(V)*100
%---------------------------------------
 [A B]=eig(S); A=A';
 Y1=A*Y0;
%---------------------------------------
 Av=mean(Y1');
 for i=1:6; for j=1:6;
   S(i,j)=(Y1(i,:)-Av(i))*(Y1(j,:)-Av(j))';
 end; end; S=S/(N1*N2-1);
 for i=1:6; V(1,i)=S(i,i); end; V=V/max(V)*100
%---------------------------------------
 for i=1:6;
   X1(1:N1,1:N2,i)=reshape(Y1(i,1:N1*N2),N1,N2);
 end;
```

```
%---------------------------------------
 for i=1:6;
   X0(1:N1,1:N2,i)=NrmImg(X0(1:N1,1:N2,i));
   X1(1:N1,1:N2,i)=     X1(1:N1,1:N2,i);
   X2(1:N1,1:N2,i)=NrmImg(X1(1:N1,1:N2,i));
 end;
 SP=ones(4,N2)*255;
 X3=[X0(:,:,1);SP;X0(:,:,2);SP;X0(:,:,3);SP;X0(:,:,4);SP;X0(:,:,5);SP;X0(:,:,6)];
 X4=[X2(:,:,1);SP;X2(:,:,2);SP;X2(:,:,3);SP;X2(:,:,4);SP;X2(:,:,5);SP;X2(:,:,6)];
 subplot(1,2,1); imshow(X3); imwrite(uint8(255*X3),'img1.jpg','jpg');
 subplot(1,2,2); imshow(X4); imwrite(uint8(255*X4),'img2.jpg','jpg');
 clear X3 X4;

 figure(2);
 X3(:,:,1)=X1(:,:,6) +1.402*X1(:,:,5);
 X3(:,:,2)=X1(:,:,6) -.3441*X1(:,:,4) -0.7141*X1(:,:,5);
 X3(:,:,3)=X1(:,:,6) +1.772*X1(:,:,4);
 X3(:,:,1)=NrmImg(X3(:,:,1));
 X3(:,:,2)=NrmImg(X3(:,:,2));
 X3(:,:,3)=NrmImg(X3(:,:,3));
 subplot(2,1,2); X3=NrmImg(X3); imshow(X3); imwrite(uint8(255*X3),'img3.jpg','jpg');

 X3(:,:,1)=X0(:,:,5);
 X3(:,:,2)=X0(:,:,6);
 X3(:,:,3)=X0(:,:,4);
 subplot(2,1,1); X3=NrmImg(X3); imshow(X3); imwrite(uint8(255*X3),'img4.jpg','jpg');


%---------------------------------------------
%  function Y=NrmImg(X)
%
%  Mx=max(X(:));
%  Mn=min(X(:));
%   Y=(X-Mn)/(Mx-Mn);
```


分散共分散行列と固有ベクトル

分散共分散行列に対する固有ベクトル ⇦ 分散共分散行列 $\mathbf{S}=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & & s_{26} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ s_{61} & s_{62} & \cdots & s_{66} \end{bmatrix}$

⇩

P = A X

A ⇩ 変換係数　　X ↑ 入力画像

⇩

PCAの後の
分散共分散行列は
対角化される
（無相関化）

但し、

$$s_{ij}=\frac{1}{N_1N_2-1}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left(x_i(n_1,n_2)-\bar{x}_i\right)\left(x_j(n_1,n_2)-\bar{x}_j\right)$$

$$\bar{x}_i=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}x_i(n_1,n_2)$$

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1(n_1,n_2) \\ x_2(n_1,n_2) \\ \vdots \\ x_6(n_1,n_2) \end{bmatrix}\begin{matrix} \leftarrow \text{スペクトル1} \\ \leftarrow \text{スペクトル2} \\ \\ \leftarrow \text{スペクトル6} \end{matrix}$$

} 入力画像

主成分分析

(<u>P</u>rincipal <u>C</u>omponent <u>A</u>nalysis)

で情報を集約する

【’Lena’画像】

{赤, 緑, 青}の 情報量は ほぼ均等

分散 = 2,898
緑の成分

PCAがない場合

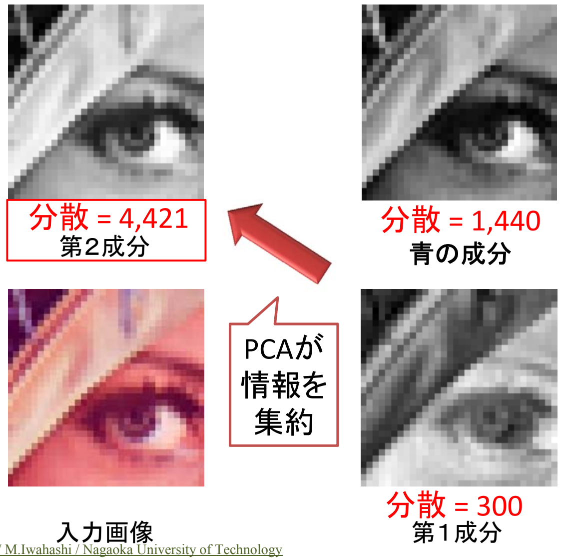
分散 = 1,440
青の成分

入力画像

分散 = 1,823
赤の成分

情報量 $\propto \log(\text{分散})$

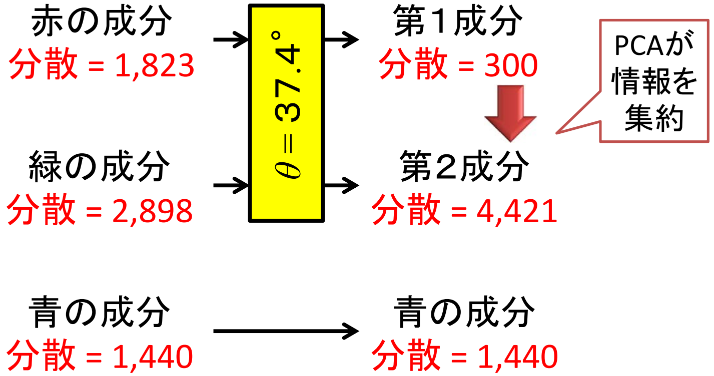
PCAが 情報を 集約する（第2成分へ）



情報量 $\propto \log(\text{分散})$

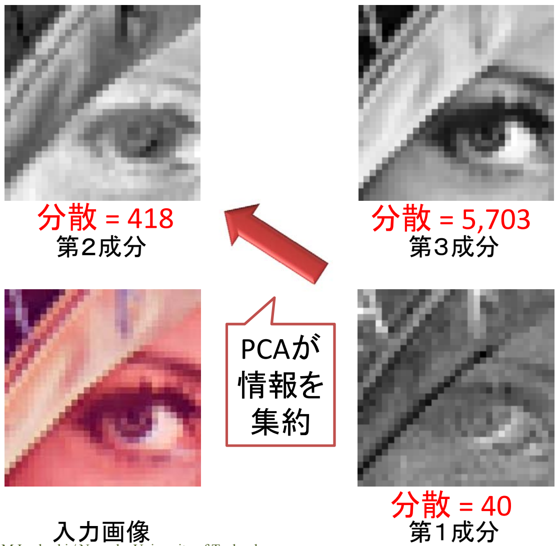
37.44 degree

PCAは 軸を回転して 情報集約



$$\begin{bmatrix} \text{第 1 成分} \\ \text{第 2 成分} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{赤の成分} \\ \text{緑の成分} \end{bmatrix}$$

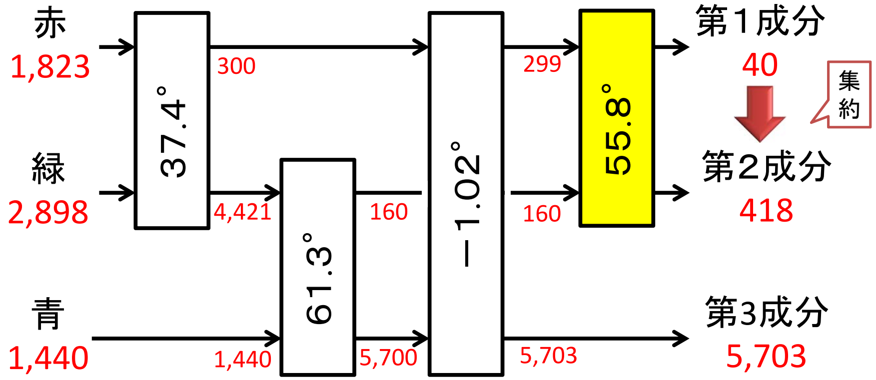
PCAが 情報を 集約する（第1→第2）



情報量 $\propto \log(\text{分散})$

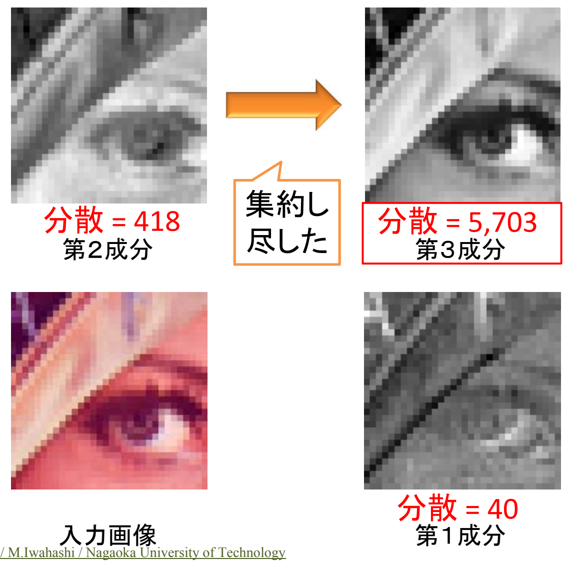
55.76 degree

PCAは 軸を回転して 情報集約



$$\text{回転：} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

PCAが 情報を 集約する（第3成分へ）

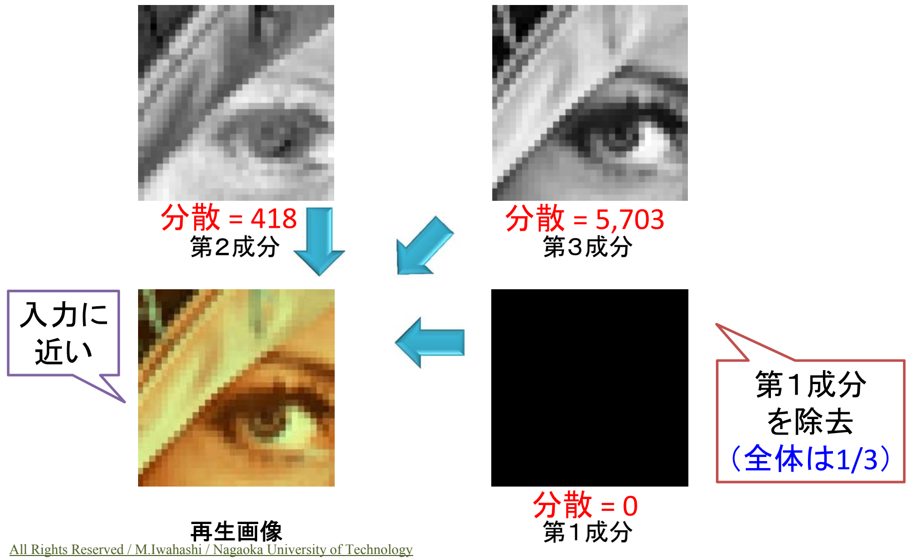


情報量 $\propto \log(\text{分散})$

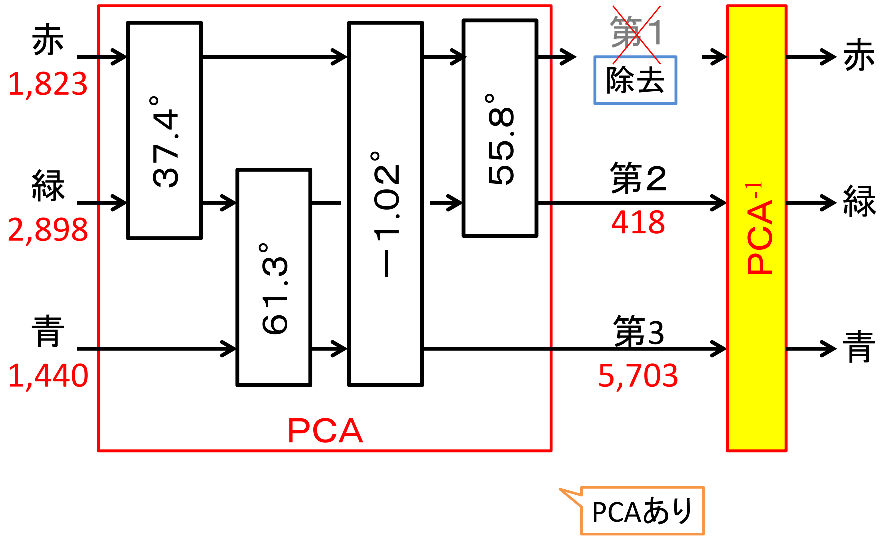
-0.02 degree

成分を除去して 画像を再生する

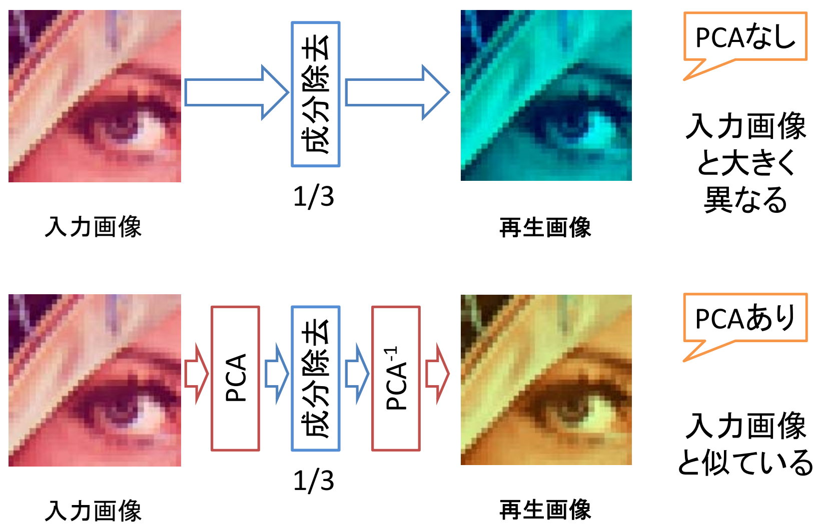
一番小さい 第1成分は 除去する



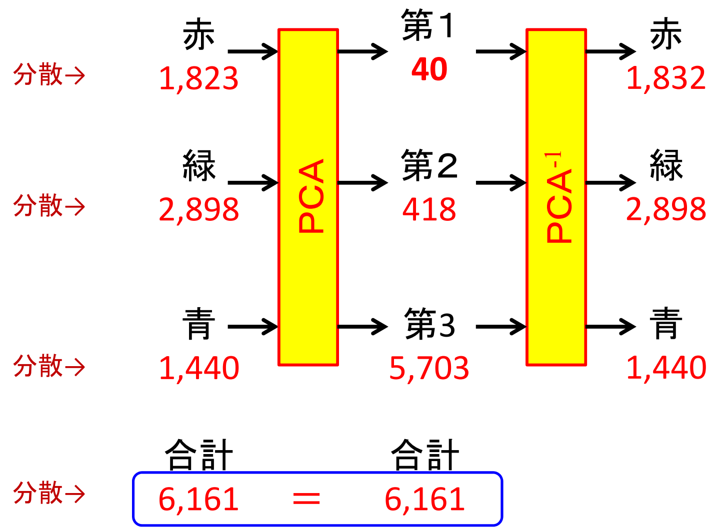
第1成分を除去



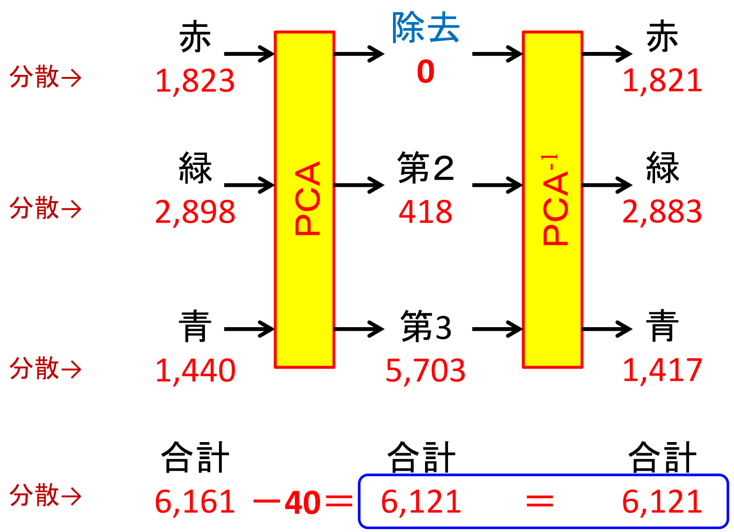
PCAは 成分除去の 影響が少ない



分散は保存される



分散は保存される

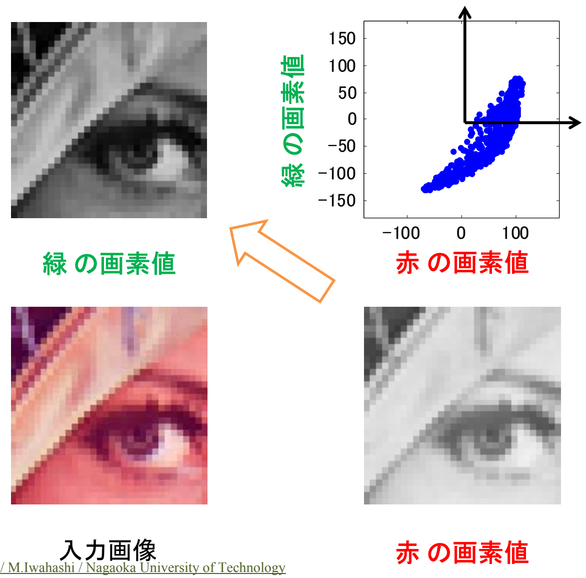


PCAは何故

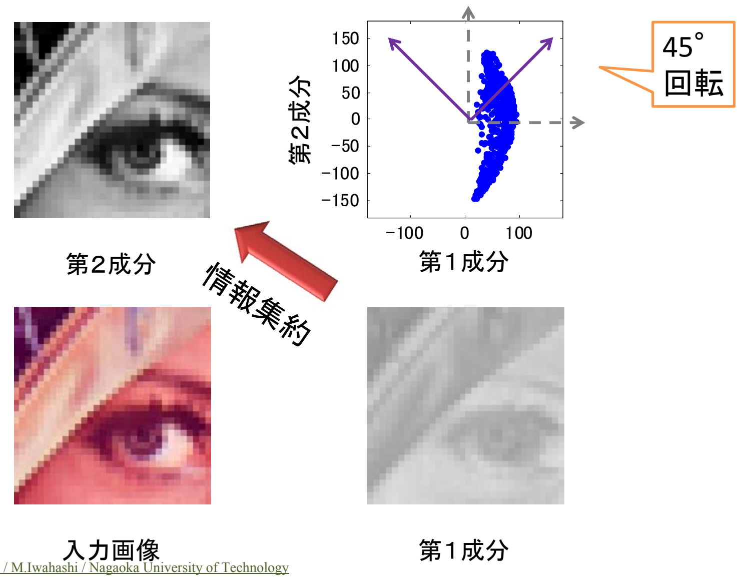
情報を集約できるのか

（回転とは？）

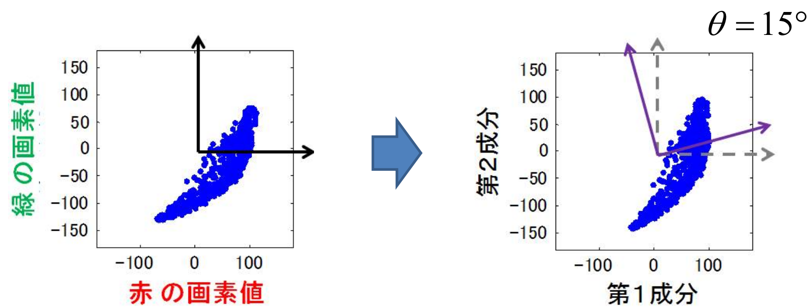
赤と緑 の 各成分



軸を回転（45°　）

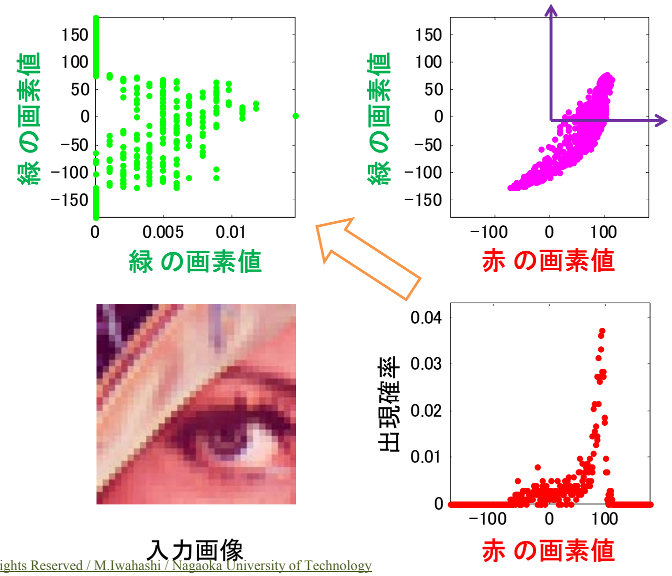


軸の回転とは？

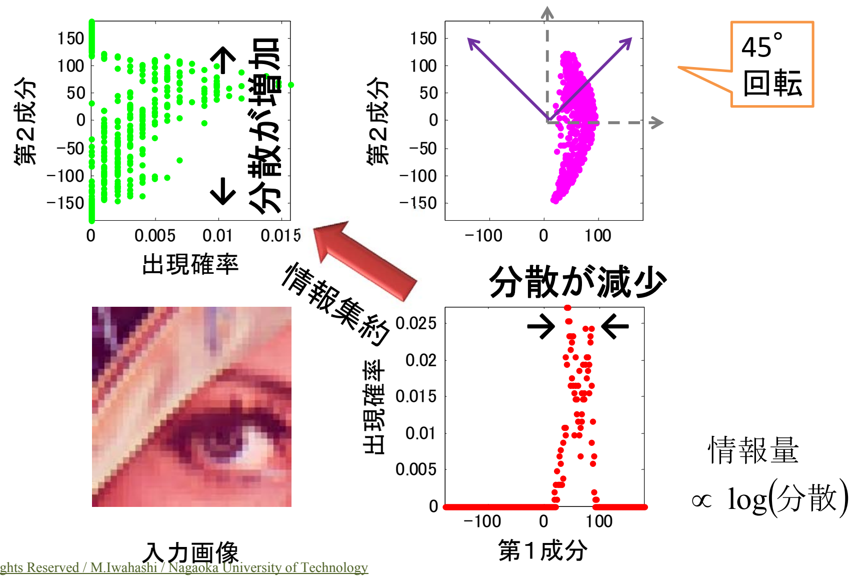


$$\begin{pmatrix}\text{成分 1}\\ \text{成分 2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{赤の画素値}\\ \text{緑の画素値}\end{pmatrix}$$

赤の成分、緑の成分



軸を回転 → 情報を集約

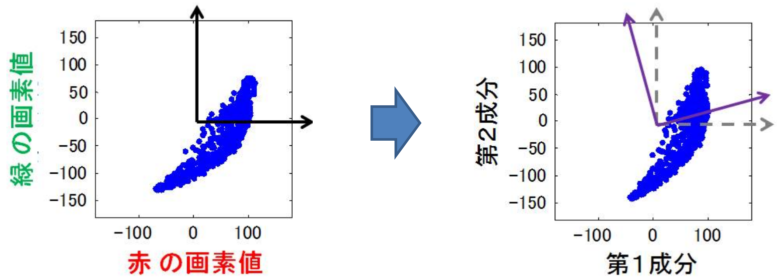


問題

① 成分1の分散を最小とする角度 θ を求めよ

② 成分1と成分2を無相関にする θ を求めよ

$$\begin{pmatrix} \text{成分 1} \\ \text{成分 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{赤の画素値} \\ \text{緑の画素値} \end{pmatrix}$$



① 成分1の分散を最小化

$$\textit{Find} \quad \theta \quad \textit{such that} \quad s_{11} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} p_1^2(n) \quad \rightarrow \quad \min$$

where

$$\begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}, \quad \overline{x}_i = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_i(n) = 0, \quad i \in \{1,2\}$$

成分1と成分2の
分散が同じ場合
最適な角度は 45°

となるハズなので、
確かめて下さい。

② 成分1と成分2を無相関化

$$\textit{Find} \quad \theta \quad \textit{such that} \quad s_{12} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} p_1(n)p_2(n) \quad = \quad 0$$

where

$$\begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}, \quad \overline{x}_i = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_i(n) = 0, \quad i \in \{1,2\}$$

結論は①と同じ

となるハズなので、
確かめて下さい。