復習

微分を併用して効果的に圧縮

64 KB （100%）

原画像 x(n)

↓

微分処理
y(n)= x(n) − x(n−1)

↓

ハフマン符号化

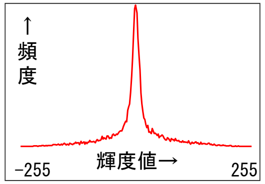
↓

圧縮データ

54 KB （84%）＜ 94%

予測誤差+128

y(n,m) = x(n,m) − x(n,m−1)



ヒストグラム

復習

微分 は 予測 （0次の外挿）

原画像 x(n)

↓

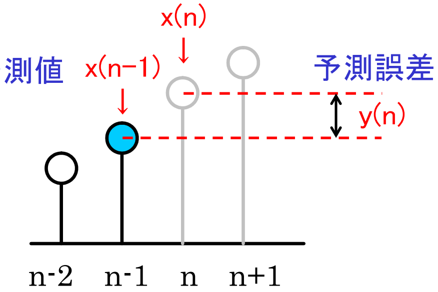
予測処理
y(n)= x(n) − $\boxed{\text{x(n−1)}}$

↓

ハフマン符号化

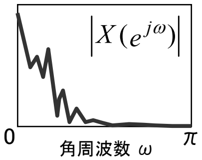
↓

圧縮データ

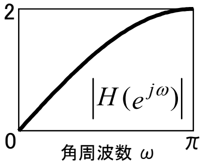


n は整数

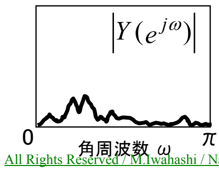
圧縮する ＝ 分散を小さくする



✖



＝



画像の
スペクトル

⇩

予測が
当たる

⇩

分散が
小さくなる ⇨

データ量を 圧縮できる

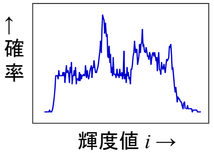
画像の
ヒストグラム

⇩

予測が
当たる

⇩

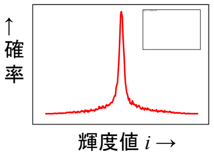
⇦ 分布が
偏る



↓

予測処理

↓



圧縮する ＝ 分散を小さくする

$X(e^{j\omega})$

画像の
スペクトル

⇩

$Y(e^{j\omega}) =$
$H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

予測が
当たる

⇩

$\sigma_y^2 =$
$\frac{1}{\pi}\int_{0^+}^{\pi} |Y(e^{j\omega})|^2 d\omega$
$\to \min$

分散が
小さくなる

⇨

分布が
偏る

⇧

エントロピーと
分布の関係

⇧

データ量を
圧縮できる $H \propto \log_2 \sigma_y^2$

$H_y =$
$-\int_{-\infty}^{\infty} P(y)\log_2 P(y)dy$

$\sigma_y^2 =$
$\int_{-\infty}^{\infty} P(y)\cdot y^2 dy$

分散 と エントロピ

確率密度関数 $P(x)$ が以下である信号 $x(n)$ について、

エントロピー H と 分散 σ^2 の関係を示せ。

$$P(x) = \begin{cases} 1/\Delta & for \quad |x| \le \Delta/2 \\ 0 & for \quad |x| > \Delta/2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

ヒント

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\log_2 P(x)dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)x^2 dx$$

分散を小さく
→ データ圧縮

$$\Rightarrow \quad \boxed{H \propto \log_2 \sigma^2}$$

分散 と エントロピ

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)x^2 dx$$
$$= 2\int_0^{\Delta/2} \frac{1}{\Delta}x^2 dx$$
$$= \frac{2}{\Delta}\int_0^{\Delta/2} x^2 dx$$
$$= \frac{2}{\Delta}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\Delta/2}$$
$$= \frac{\Delta^2}{12}$$

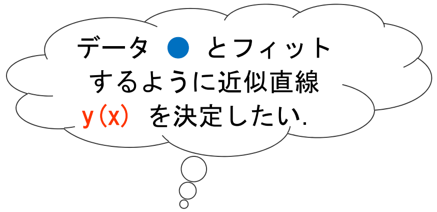
$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\log_2 P(x)dx$$
$$= -2\int_0^{\Delta/2} \frac{1}{\Delta}\log_2\frac{1}{\Delta}dx$$
$$= \frac{2\log_2\Delta}{\Delta}\int_0^{\Delta/2} dx$$
$$= \log_2\Delta$$

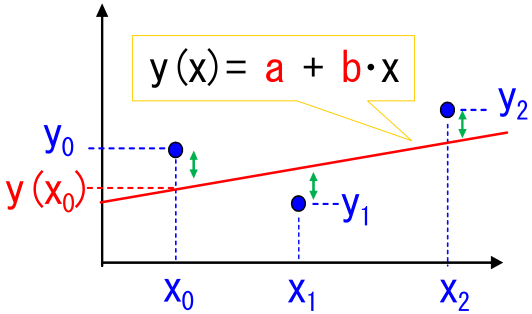
$$H = \log_2\Delta$$
$$= \frac{1}{2}\left(\log_2\sigma^2 + \log_2 12\right)$$

分散を小さく
→ データ圧縮

$$\Rightarrow \quad \boxed{H \propto \log_2 \sigma^2}$$

最小自乗法とは？ （パラメータが2つ）





自乗誤差

$$I = \sum_{i=0}^{N-1} \{y(x_i) - y_i\}^2$$

が最小となるように,

→ (a, b) を求める.

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial I}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial b} = 0$$

より, 連立方程式の解として (a, b) が求まる.

最小自乗法 （解法）

$$I = \sum_{i=0}^{N-1} \{y(x_i) - y_i\}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \{a + b x_i - y_i\}^2 \qquad \leftarrow \quad y(x_i) = a + b x_i$$

より,

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=0}^{N-1} \{a + b x_i - y_i\}^2 = 2\sum_{i=0}^{N-1} \{a + b x_i - y_i\} = 0 \qquad \leftarrow \quad \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=0}^{N-1} \{a + b x_i - y_i\}^2 = 2\sum_{i=0}^{N-1} \{a + b x_i - y_i\} x_i = 0$$

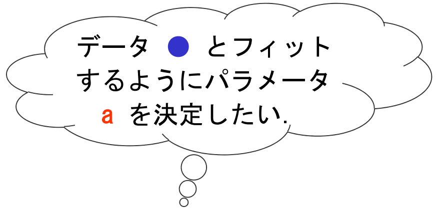
すなわち,

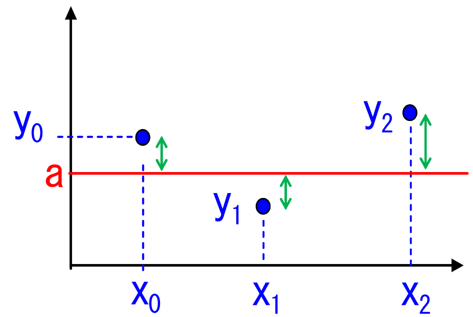
$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} 1 & \sum_{i=0}^{N-1} x_i \\ \sum_{i=0}^{N-1} x_i & \sum_{i=0}^{N-1} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} y_i \\ \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i \end{pmatrix}$$

以上より,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum x_i^2 \sum 1 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & \sum 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \end{pmatrix}$$

最小自乗法とは？ （パラメータが1つ）





自乗誤差

$$I=\sum_{i=0}^{N-1}\{a-y_i\}^2$$

が最小となるように,

→ a を求める.

$$\frac{\partial I}{\partial a}=0$$

より a が求まる.

最小自乗法 （解法）

$$I=\sum_{i=0}^{N-1}\{a-y_i\}^2$$

より,

$$\frac{\partial I}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=0}^{N-1}\{a-y_i\}^2=2\sum_{i=0}^{N-1}\{a-y_i\}=0$$

すなわち,

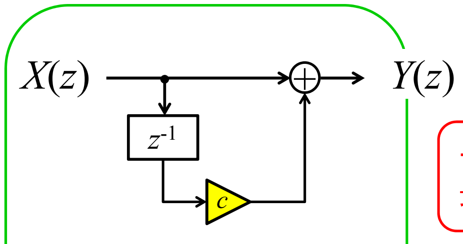
$$a\sum_{i=0}^{N-1}1-\sum_{i=0}^{N-1}y_i=0$$

以上より,

$$a=\frac{\sum_{i=0}^{N-1}y_i}{\sum_{i=0}^{N-1}1}=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}y_i$$

最適な予測器 を設計しよう

予測処理



$$Y(z)=(1+c\,z^{-1})X(z)$$

最適化する

分散を最小化する

データ量が最小になる $H\propto\log_2\sigma_y^2$

$$\sigma_y^2=\frac{1}{N}\sum_n\{y(n)-m_y\}^2$$

$$m_y=\frac{1}{N}\sum_n y(n)$$

最適な予測器 を設計しよう

以下の予測処理,

y(n) = x(n) + ***c*** x(n−1)

において，与えられた入力信号 “x(n)”

に対する最適な “***c***” の値を求めたい.

予測後のデータ量 ∝ log(予測誤差の分散)

⇒ 予測誤差の分散を最小化する

最適化の方法

1．予測誤差 “y(n)” の分散値を “c” で表す．

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_n y^2(n)$$
$$= \frac{1}{N}\sum_n \{x(n)+c\cdot x(n-1)\}^2$$

平均値＝0
としている

$$m_y = \frac{1}{N}\sum_n y(n) = 0$$

2．得られた分散値を最小とする “c” は次式を満たす．

$$\frac{\partial \sigma_y^2}{\partial c} = 0$$

以上を解けば最適係数値が決定される．

3．計算すると

$$\frac{\partial}{\partial c}\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_n 2\{x(n)+c\cdot x(n-1)\}\cdot\frac{\partial}{\partial c}\{x(n)+c\cdot x(n-1)\} = 0$$
$$\sum_n \{x(n)+c\cdot x(n-1)\}\cdot\frac{\partial}{\partial c}\{x(n)+c\cdot x(n-1)\} = 0$$
$$\sum_n \{x(n)+c\cdot x(n-1)\}\cdot x(n-1) = 0$$
$$\sum_n x(n)x(n-1) + c\cdot\sum_n x^2(n-1) = 0$$

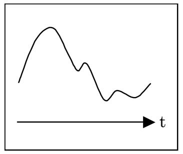
4．以上より、

$$\boxed{c = \frac{-R_1}{R_0}}$$

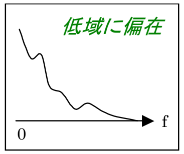
最適な予測係数は
自己相関で決まる

$$\begin{cases} R_0 = \sum_n x^2(n-1) \\ R_1 = \sum_n x(n)x(n-1) \end{cases}$$

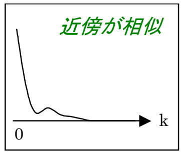
周波数振幅特性 と 自己相関



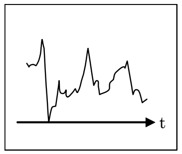
画像信号



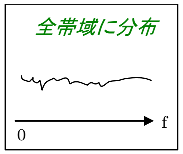
画像信号の
周波数振幅特性



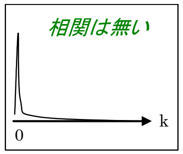
画像信号の
自己相関



白色雑音



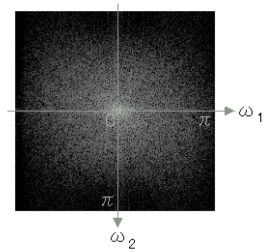
白色雑音の
周波数振幅特性



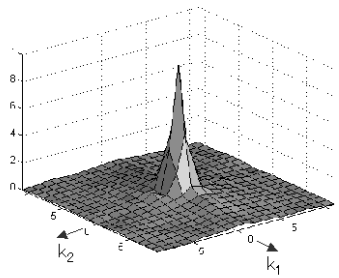
白色雑音の
自己相関

周波数振幅特性 と 自己相関

画像信号



周波数
振幅特性
（対数表示）



自己相関
（分散で正規化）