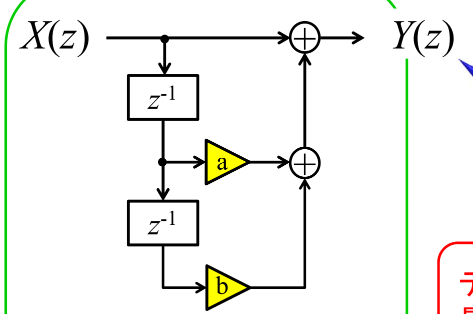
最適な予測器を設計しよう（K= 2次）



$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$H(z) = 1 + az^{-1} + bz^{-2}$$

分散が最小となるよう
a ,b を最適化する

⇩

データ量が
最小になる　$H \propto \log_2 \sigma_y^2$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_n \{y(n) - m_y\}^2$$

$$m_y = \frac{1}{N}\sum_n y(n)$$

最適な予測器（パラメータ　2つ）

以下の予測処理，

y(n) = x(n) +***a*** x(n−1) +***b*** x(n−2)

において，与えられた入力信号 “x(n)”

に対する最適な “*a, b*” の値を求めたい．

⇩

予測後のデータ量　∝　log(予測誤差の分散)

⇒　予測誤差の分散を最小化する

最適化の方法（パラメータ2つ）

1．予測誤差 “y(n)” の分散値を “*a, b*” で表す．

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_n y^2(n)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_n \{x(n) + a\cdot x(n-1) + b\cdot x(n-2)\}^2$$

平均値＝0
としている

$$m_y = \frac{1}{N}\sum_n y(n) = 0$$

2．得られた分散値を最小とする “*a, b*” は次式を満たす．

$$\frac{\partial}{\partial a}\sigma_y^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b}\sigma_y^2 = 0$$

この方程式を解けば最適な係数が決まる

3．最初の方程式は、

$$f = x(n) + a\cdot x(n-1) + b\cdot x(n-2) \qquad (1)$$

とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial a}\sigma_y^2 = \frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{N}\sum_n f^2 = \frac{1}{N}\sum_n 2f\cdot\frac{\partial}{\partial a}f = 0$$

$$\therefore \quad \sum_n f\cdot\frac{\partial}{\partial a}f = 0 \qquad (2)$$

$(1)\to(2)$

$$\sum_n \{x(n) + a\cdot x(n-1) + b\cdot x(n-2)\}\cdot x(n-1) = 0$$

$$\sum_n x(n)x(n-1) + a\cdot\sum_n x^2(n-1) + b\cdot\sum_n x(n-1)x(n-2) = 0$$

以上より、

$$\boxed{R_{01} + a\cdot R_{11} + b\cdot R_{12} = 0}$$

但し，

$$R_{jk} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n-j)x(n-k)$$

4. もう一つの方程式より、

$$\frac{\partial}{\partial b}\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_n 2f\cdot\frac{\partial}{\partial b}f = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_n f\cdot\frac{\partial}{\partial b}f = 0$$

に

$$f = x(n) + a\cdot x(n-1) + b\cdot x(n-2)$$

を代入して、

$$\sum_n \{x(n) + a\cdot x(n-1) + b\cdot x(n-2)\}\cdot x(n-2) = 0$$

$$\sum_n x(n)x(n-2) + a\cdot\sum_n x(n-1)x(n-2) + b\cdot\sum_n x^2(n-2) = 0$$

以上より、

$$\boxed{R_{02} + a\cdot R_{12} + b\cdot R_{22} = 0}$$

但し,

$$R_{jk} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n-j)x(n-k)$$

5. 得られた2つの方程式より

$$\begin{cases} R_{01} + a\cdot R_{11} + b\cdot R_{12} = 0 \\ R_{02} + a\cdot R_{12} + b\cdot R_{22} = 0 \end{cases}$$

自己相関が

$$\begin{cases} R_{11} = R_{22} = \Theta_0 \\ R_{01} = R_{12} = \Theta_1 \\ R_{02} = R_{13} = \Theta_2 \end{cases} \quad \leftarrow \quad R_{jk} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n-j)x(n-k)$$

を満たす場合、方程式は、

$$\begin{cases} \Theta_1 + a\cdot\Theta_0 + b\cdot\Theta_1 = 0 \\ \Theta_2 + a\cdot\Theta_1 + b\cdot\Theta_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Theta_0 & \Theta_1 \\ \Theta_1 & \Theta_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. 以上より、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \Theta_0 & \Theta_1 \\ \Theta_1 & \Theta_0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{-1}{\Theta_0^2 - \Theta_1^2}\begin{pmatrix} \Theta_0 & -\Theta_1 \\ -\Theta_1 & \Theta_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{\Theta_0^2 - \Theta_1^2}\begin{pmatrix} \Theta_0\Theta_1 - \Theta_1\Theta_2 \\ -\Theta_1\Theta_1 + \Theta_0\Theta_2 \end{pmatrix}$$

最適な予測係数は
自己相関で決まる

但し,

$$\Theta_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n-j)x(n-i), \quad |j-i| = k$$

k次の自己相関

k次の相関係数を、

$$\Phi_k = \frac{\Theta_k}{\Theta_0}$$

但し,

$$\Theta_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n-j)x(n-i), \quad |j-i| = k$$

と定義すると、

$$\begin{cases} a = \dfrac{\Theta_1\Theta_2 - \Theta_0\Theta_1}{\Theta_0^2 - \Theta_1^2} = \dfrac{-(1-\Phi_2)\Phi_1}{1-\Phi_1^2} \\ b = \dfrac{\Theta_1\Theta_1 - \Theta_0\Theta_2}{\Theta_0^2 - \Theta_1^2} = \dfrac{\Phi_1^2 - \Phi_2}{1-\Phi_1^2} \end{cases}$$

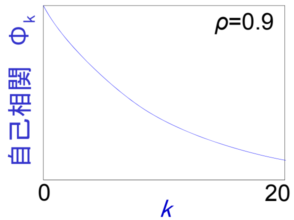
最適な予測係数は
自己相関係数で
決まる

AR(1)モデルに対する　最適予測

入力信号の自己相関が、

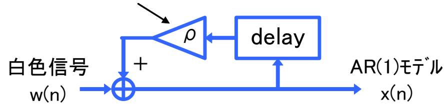
$$\Phi_k = \rho^k$$

とモデル化されるとき、



$$\begin{cases} a = \dfrac{-(1-\Phi_2)\Phi_1}{1-\Phi_1^2} = \dfrac{-(1-\rho^2)\rho}{1-\rho^2} = -\rho \\ b = \dfrac{\Phi_1^2-\Phi_2}{1-\Phi_1^2} = \dfrac{\rho^2-\rho^2}{1-\rho^2} = 0 \end{cases}$$

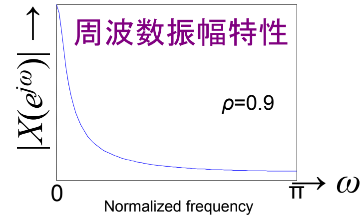
画像信号の性質をモデル化する

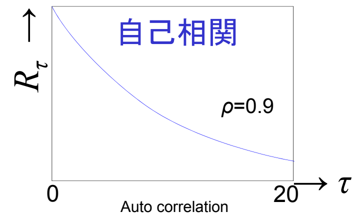


$$x(n) = w(n) + \rho \cdot x(n-1)$$

但し$w(n)$は平均値が零の白色信号

x(n) の
周波数振幅特性
と
自己相関関数
を求めよ





AR（1）信号の周波数振幅特性と自己相関

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\rho e^{j\omega}}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1-\rho\cdot\cos\omega)^2+(-\sin\omega)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cdot\cos\omega}}$$

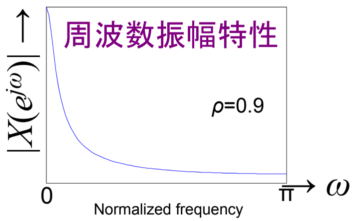
$$R_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-1)$$

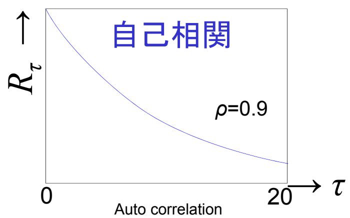
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \{\rho\cdot x(n-1)+w(n)\}x(n-1)$$

$$= \rho\cdot\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n-1) + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n-1)$$

$$\approx \rho\cdot R_0$$

$$\therefore \boxed{R_k = \rho^k \cdot R_0}$$





AR(1)モデルに最適な予測器

以下の予測処理,

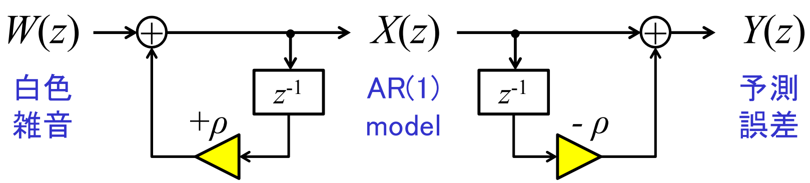
y(n) = x(n) +***a*** x(n−1) +***b*** x(n−2)

において，AR(1) モデルに

に対する最適な "***a, b***" の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

AR(1) model の最適予測



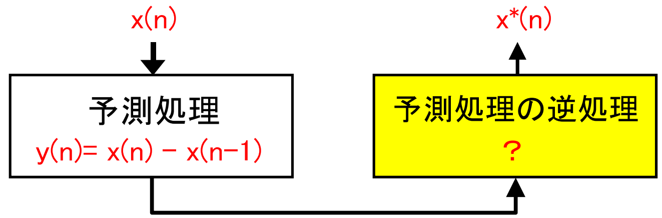
$$x(n) = w(n) + \rho \cdot x(n-1) \qquad y(n) = x(n) - \rho \cdot x(n-1)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-\rho \cdot z^{-1}} W(z) \qquad Y(z) = \left(1-\rho \cdot z^{-1}\right) X(z)$$

$$Y(z) = W(z)$$

【問題】

① 予測の逆処理は？

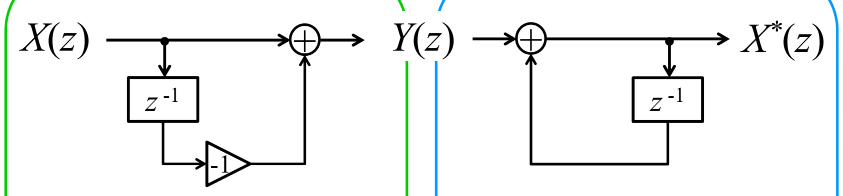


② z変換で表すと？ （Signal Flow Graph は？）

③ 周波数特性は？

【解答】 その3

② Signal Flow Graph は？



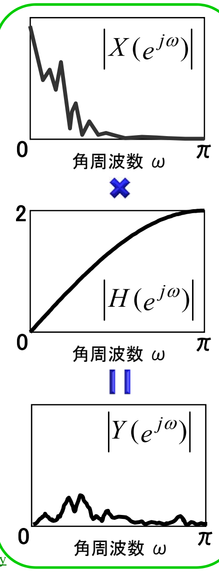
$$Y(z) = (1 - z^{-1}) X(z)$$

伝達関数 $H(z)$

$$X^*(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} Y(z)$$

【解答】 その4

③ 周波数特性は？



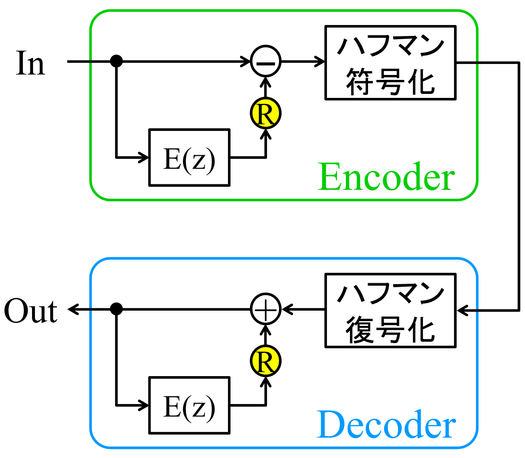
予測処理で低域をつぶす

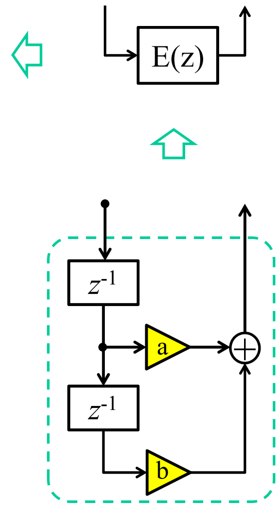
⇩

データ量が圧縮される ⇦ 分散が小さくなる

？

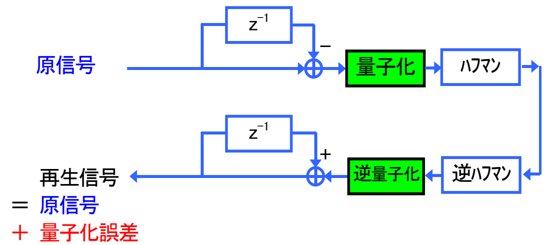
最適予測による ロスレス符号化の実現





Ⓡ rounding to integer

ロッシーな予測符号化 “試作品”



再生信号
= 原信号
+ 量子化誤差

量子化

$$y'(n) = round\left[\frac{y(n)}{\Delta}\right]$$

（Δ＝ステップサイズ）

逆量子化

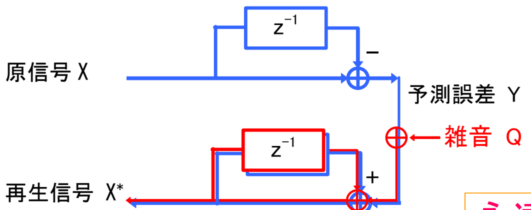
$$y^*(n) = y'(n)\cdot\Delta$$

$$X^*(z) = X(z) + \frac{Q(z)}{1-z^{-1}}$$

↑ 再生信号　↑ 原信号　↑ 量子化誤差

外挿予測に量子化を導入する
→ 量子化誤差が伝播し続ける
→ 局所復号を導入して回避する

量子化雑音の再生信号への影響



永遠に割り切れない・・・

仮にQ(z)=1であっても量子化誤差は永久に出続ける！

図から、

$$Y(z) = X(z) - X(z)z^{-1}$$

$$X^*(z) = Y(z) + Q(z) + X^*(z)z^{-1}$$

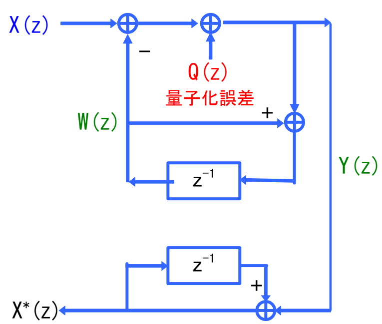
$$1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

まとめると、

$$X^*(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}\left\{(1-z^{-1})X(z) + Q(z)\right\} = X(z) + \boxed{\frac{1}{1-z^{-1}}}\cdot Q(z)$$

【問題】

以下の等価回路を用いて、X*_(z) を X(z) と Q(z) で表せ.



図からわかることは、

$$Y(z) = X(z) - W(z) + Q(z)$$

$$W(z) = \{W(z) + Y(z)\}z^{-1}$$

$$X^*(z) = Y(z) + X^*(z)z^{-1}$$

以上をまとめると・・・

$$Y(z) = (1-z^{-1})(X(z) + Q(z))$$

$$X^*(z) = \frac{Y(z)}{1-z^{-1}} = X(z) + Q(z)$$