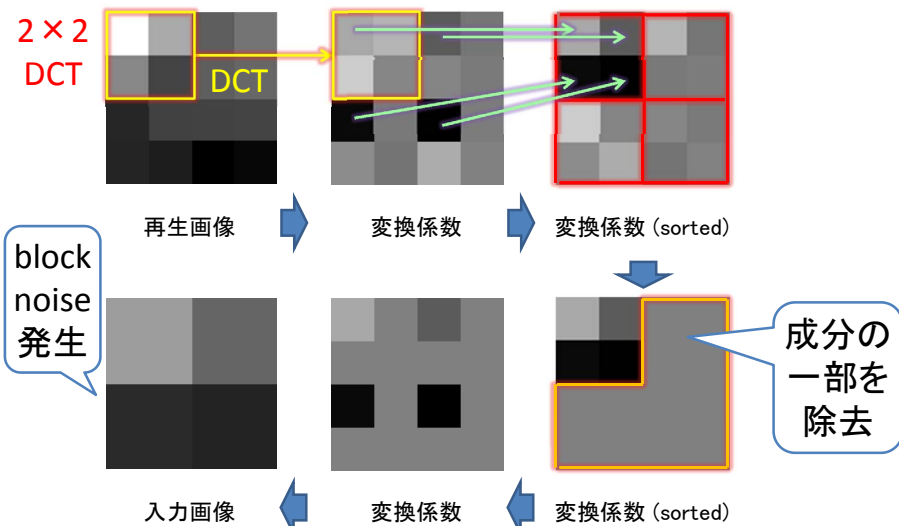
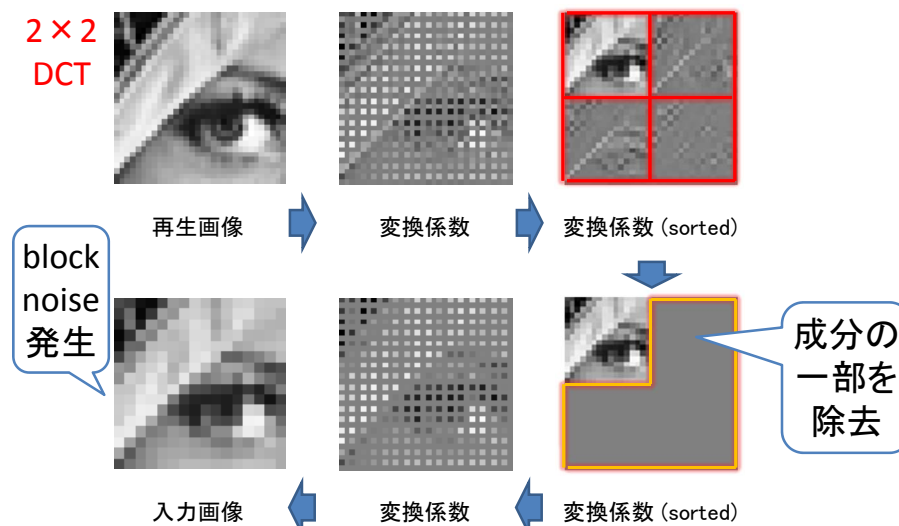


変換係数を基底毎にまとめる



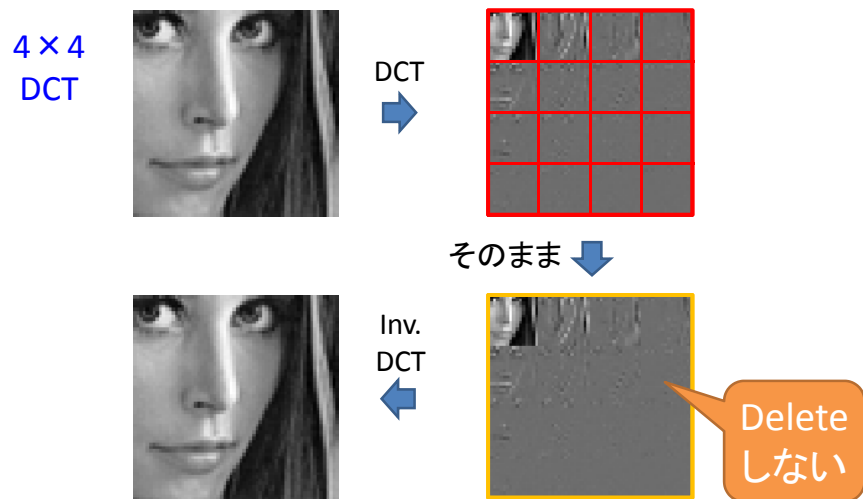
All Rights Reserved / M.Iwahashi / Nagaoka University of Technology

変換係数を基底毎にまとめる



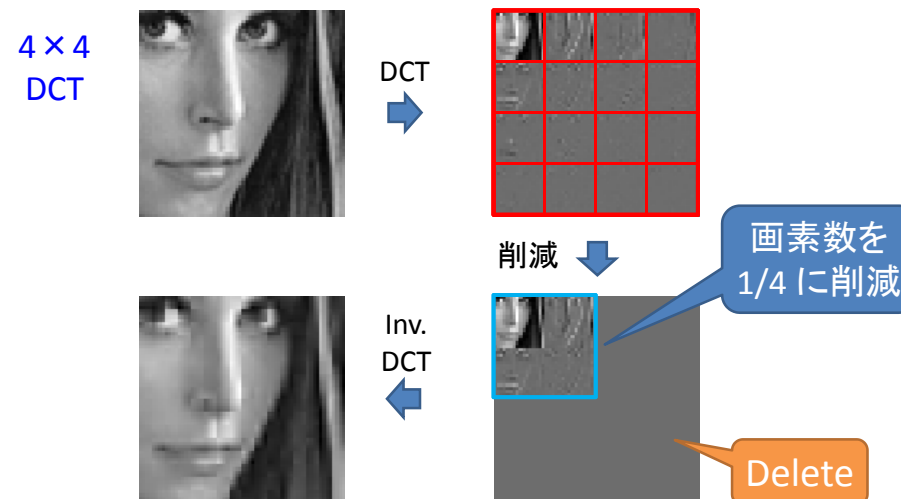
All Rights Reserved / M.Iwahashi / Nagaoka University of Technology

削減せず (4点のDCT)



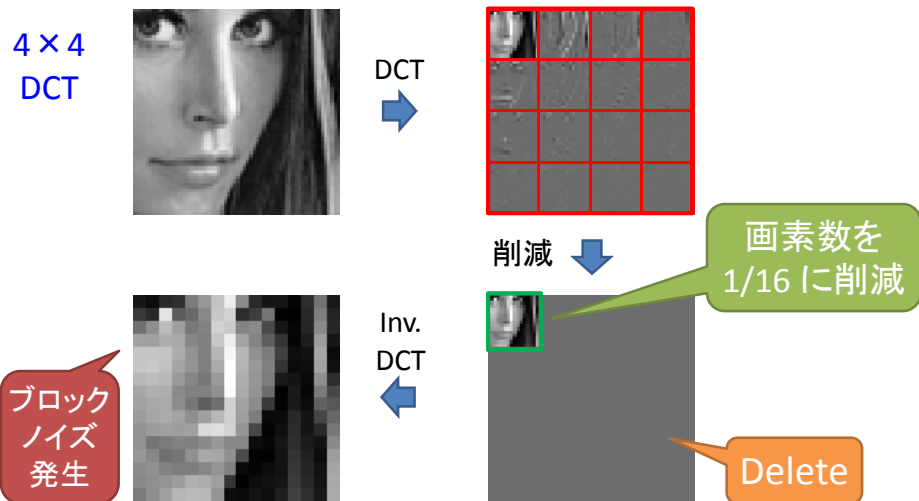
All Rights Reserved / M.Iwahashi / Nagaoka University of Technology

1/4 に削減 (4点のDCT)

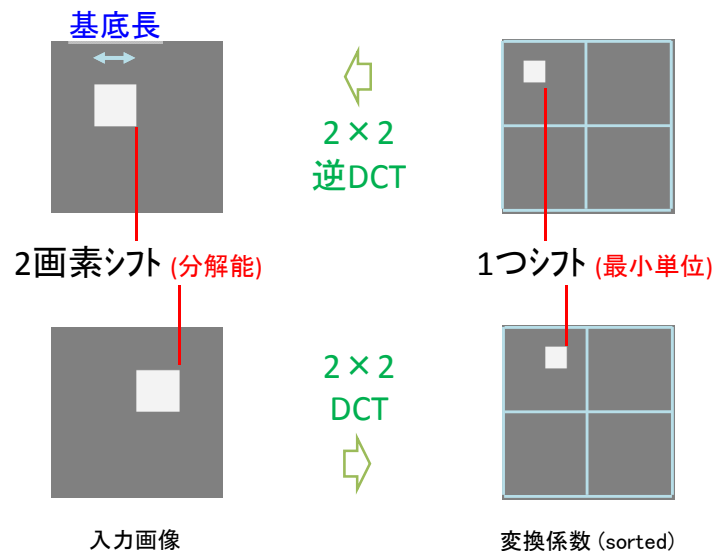


All Rights Reserved / M.Iwahashi / Nagaoka University of Technology

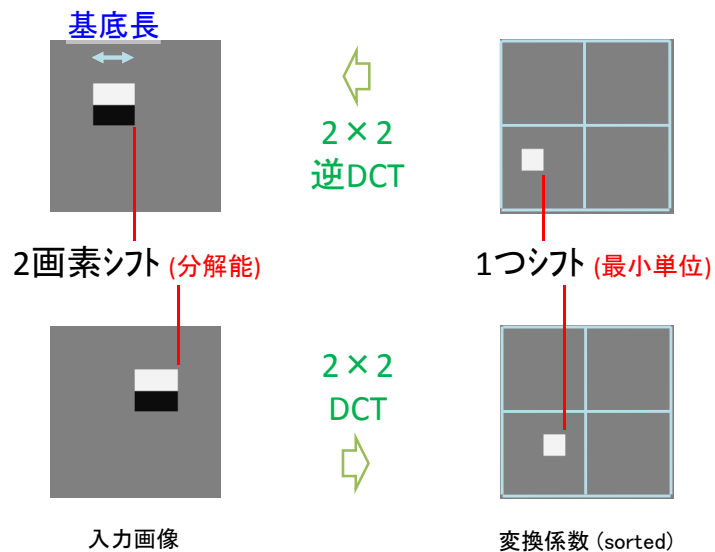
1/16 に削減 (4点のDCT)



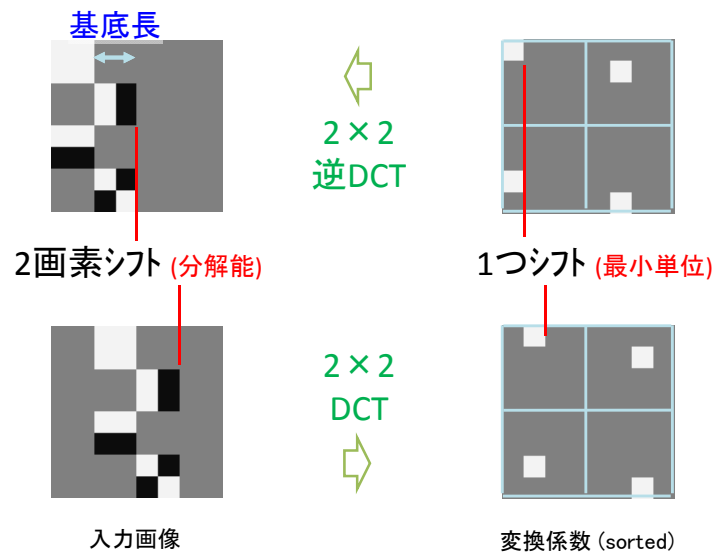
基底の長さ = 空間分解能 = 2画素



基底の長さ = 空間分解能 = 2画素



基底の長さ = 空間分解能 = 2画素



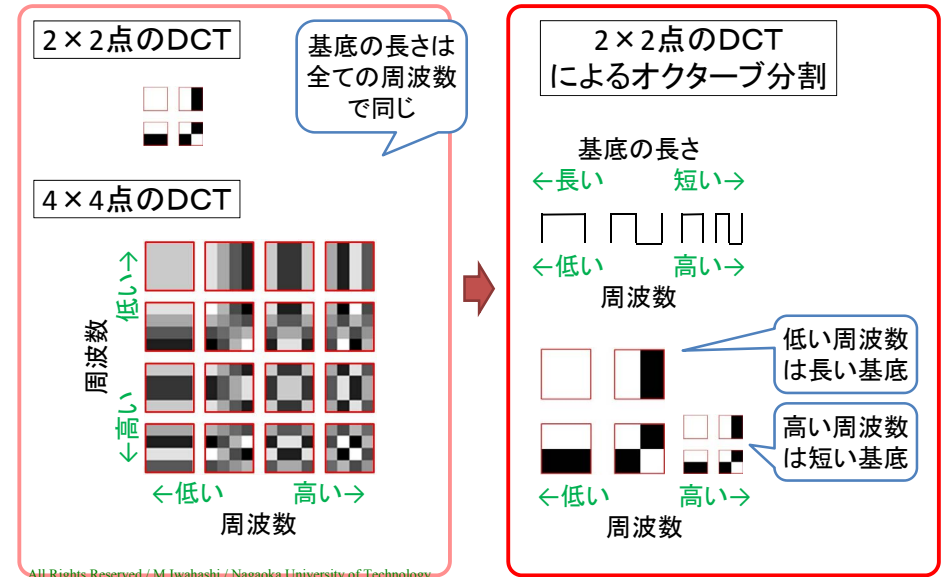
直交変換の基底

	空間分解能	周波数分解能	変換係数の数	シフト不変性
画像サイズのDFT	なし ---	1/size 細かい	倍増	ある
8 × 8 点のDCT	8画素 粗い	1/8 細かい	同じ	ない
2 × 2 点のDCT	2画素 細かい	1/2 粗い	同じ	ない

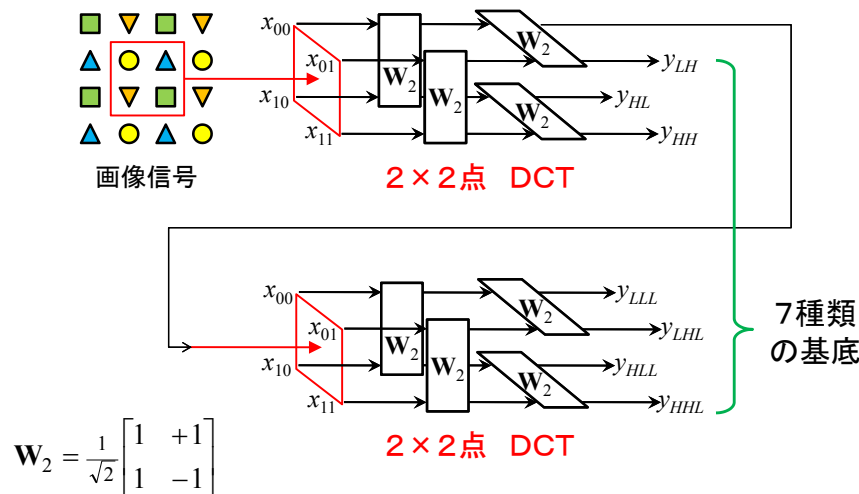
空間分解能 = 基底の長さ

全ての周波数で基底の長さが同じ

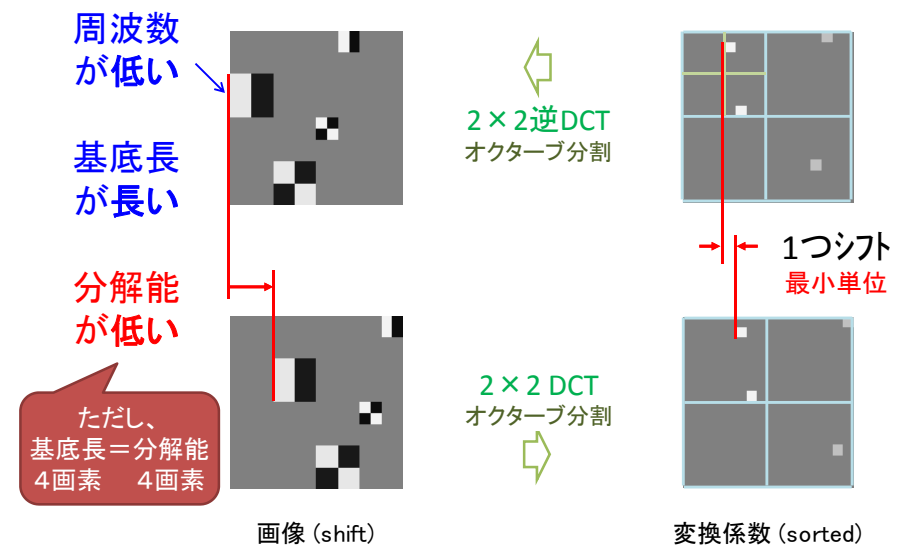
周波数により基底の長さを変えてみる



2 × 2 点DCTによるオクターブ分割



2 × 2 点DCTによるオクターブ分割



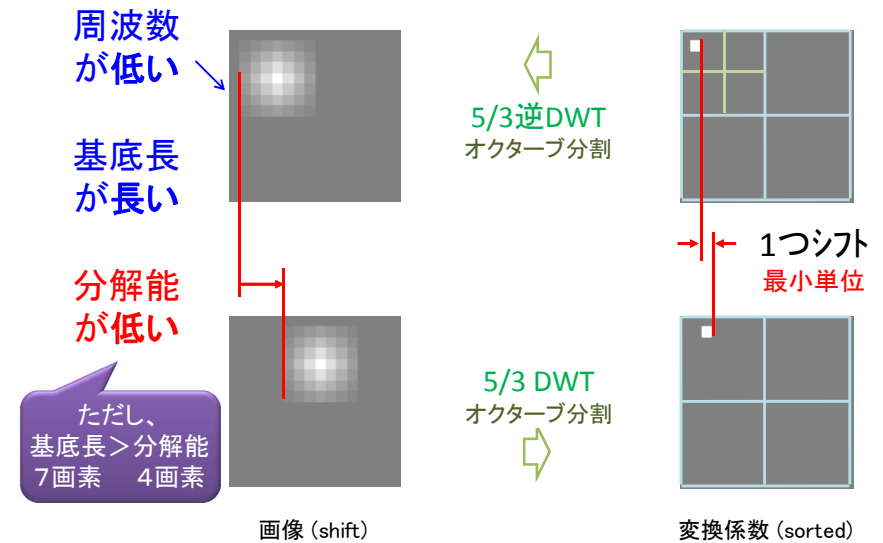
オクターブ分割のメリット

分解能	緩やかな振動		細かい振動	
	空間	周波数	空間	周波数
4 × 4 点のDCT	4画素 粗い	1/4 細かい	4画素 粗い	1/4 細かい
2 × 2 点のDCT オクターブ分割	4画素 粗い	1/4 細かい	2画素 細かい	1/2 粗い

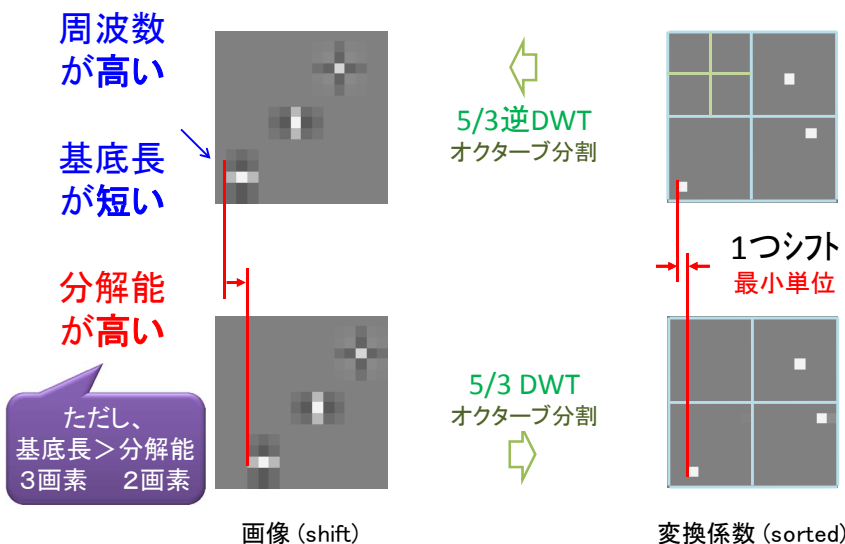
ただし、
基底長 = 分解能

緩やかな振動は、周波数を正確に
細かい振動は、位置を正確に推定

ウェーブレットによるオクターブ分割



ウェーブレットによるオクターブ分割



ウェーブレットの基底

分解能	緩やかな振動		細かい振動	
	空間	周波数	空間	周波数
2 × 2 点のDCT オクターブ分割	4画素 粗い	1/4 細かい	2画素 細かい	1/2 粗い
ウェーブレット オクターブ分割	4画素 粗い	1/4 細かい	2画素 細かい	1/2 粗い

ただし、
基底長 > 分解能

緩やかな振動は、周波数を正確に
細かい振動は、位置を正確に推定

「基底」の研究動向

- ・大きさが1 (ノルムが1)
- ・互いに直交 (内積が零)

正規直交

・高周波は短い基底 (wavelet)

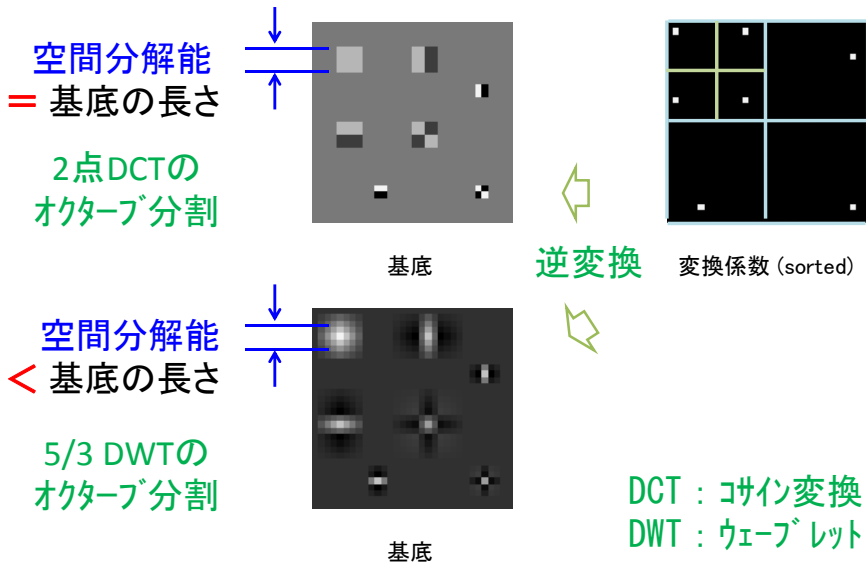
- ・直交から双直交へ (条件を緩和)
- ・冗長性を持たせる (over complete) (sparse)
- ・多次元方向性 (directional)
- ・シフト不変性 (complex)

3つの方法の違い

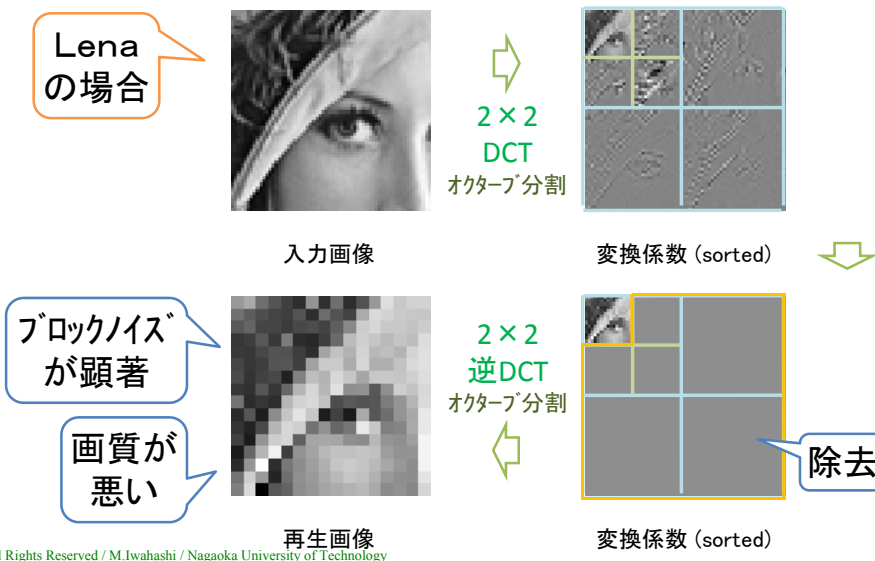
方法	空間分解能		基底の長さ
	低周波	高周波	
4 × 4点のDCT	4画素 粗い	4画素 粗い	= 分解能
2 × 2点のDCT オクターブ分割	4画素 粗い	2画素 細かい	> 分解能

隣の基底と
オーバーラップ

基底を比べる



2 × 2点DCT (オクターブ分割)



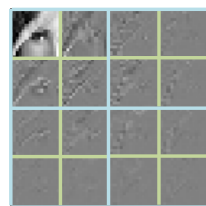
4 × 4点のDCT

Lena
の場合



入力画像

4 × 4
DCT



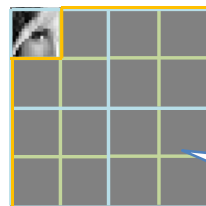
変換係数 (sorted)

ブロックノイズ
が顕著



再生画像

4 × 4
逆DCT



変換係数 (sorted)

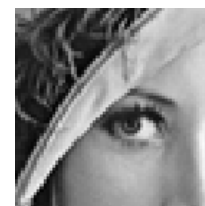
除去

画質は
向上

All Rights Reserved / M.Iwahashi / Nagaoka University of Technology

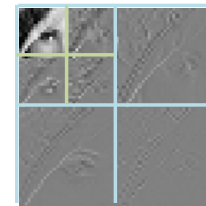
ウェーブレット (オクターブ分割)

Lena
の場合



入力画像

5/3
DWT
オクターブ分割



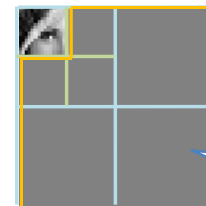
変換係数 (sorted)

ブロックノイズ
は軽減



再生画像

5/3
逆DWT
オクターブ分割



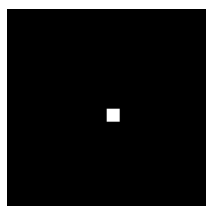
変換係数 (sorted)

除去

All Rights Reserved / M.Iwahashi / Nagaoka University of Technology

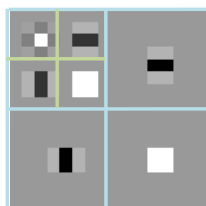
2 × 2点DCT (オクターブ分割)

インパルスは
全ての
基底の和



入力画像

2 × 2
DCT
オクターブ分割



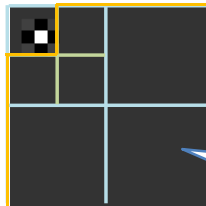
変換係数 (sorted)

ブロックノイズ
が顕著



再生画像

2 × 2
逆DCT
オクターブ分割



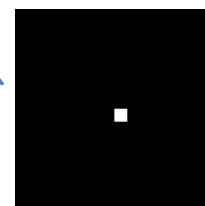
変換係数 (sorted)

除去

All Rights Reserved / M.Iwahashi / Nagaoka University of Technology

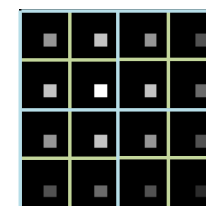
4 × 4点のDCT

インパルスは
全ての
基底の和



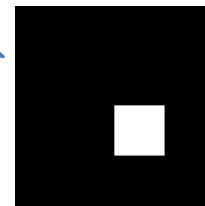
入力画像

4 × 4
DCT



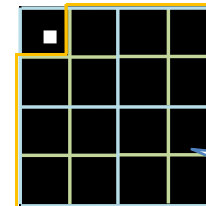
変換係数 (sorted)

ブロックノイズ
が顕著



再生画像

4 × 4
逆DCT



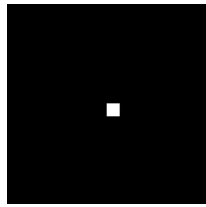
変換係数 (sorted)

除去

All Rights Reserved / M.Iwahashi / Nagaoka University of Technology

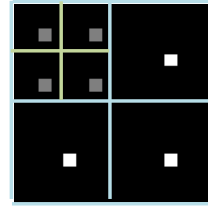
ウェーブレット (オクターブ分割)

インパルスは
全ての
基底の和



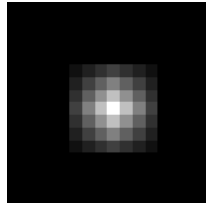
入力画像

5/3
DWT
オクターブ分割



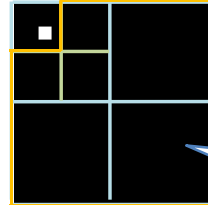
変換係数 (sorted)

ブロックノイズ
が軽減



再生画像

5/3
逆DWT
オクターブ分割

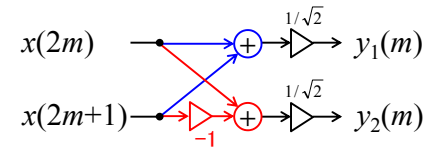


変換係数 (sorted)



除去

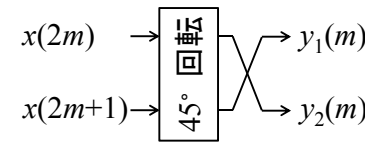
2点の直交変換と回転 (45°)



$$\begin{bmatrix} y_1(m) \\ y_2(m) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2m) \\ x(2m+1) \end{bmatrix}$$

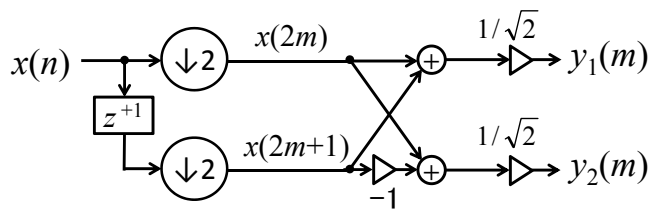


2点の場合は
DCT = WHT = DFT



$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2m) \\ x(2m+1) \end{bmatrix}$$

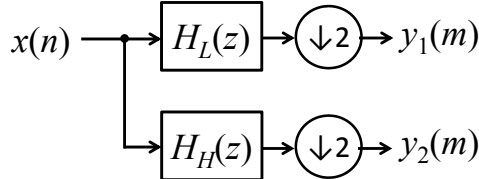
直交変換はフィルタバンク



45° 回転
2点のDFT
2点のDCT
2点のWHT

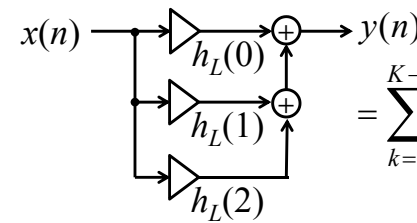


フィルタバンク

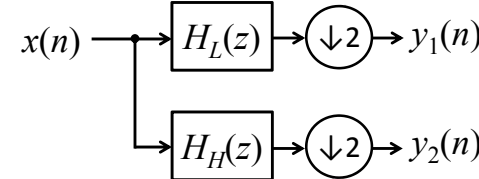


$$\begin{bmatrix} H_L(z) \\ H_H(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}$$

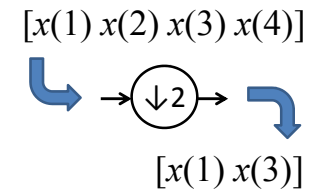
フィルタバンクの 内部構造



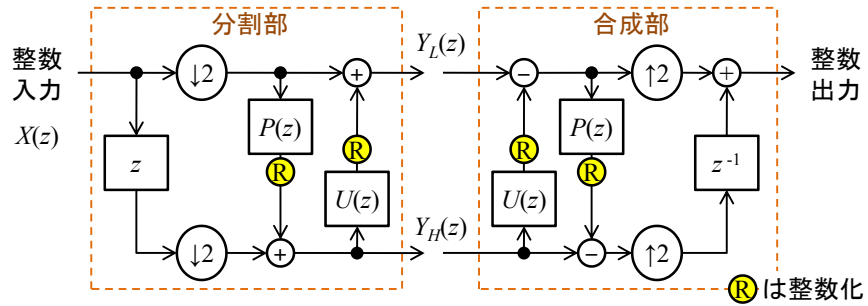
$$H(z) = \sum_{k=0}^{K-1} h_L(k) z^{-k}$$



ダウンサンプラ

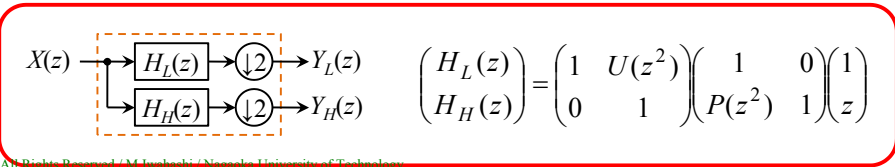


ウェーブレットもフィルタバンク



同じ ↓

フィルタバンク



$$\begin{pmatrix} H_L(z) \\ H_H(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & U(z^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P(z^2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$$

5/3 DWTのフィルタ

一般に

$$\begin{pmatrix} H_L(z) \\ H_H(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & U(z^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P(z^2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+U(z^2)(P(z^2)+z) \\ P(z^2)+z \end{pmatrix}$$

5/3 DWTの場合

$$\begin{pmatrix} P(z) \\ U(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z+1 \\ 1+z^{-1} \end{pmatrix}$$

以上より

$$\begin{pmatrix} H_L(z) \\ H_H(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (z+z^{-1})/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(z+z^{-1})/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$$

DCTとウェーブレット フィルタの伝達関数の違い

2点 DCT

$$\begin{pmatrix} H_L(z) \\ H_H(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+z \\ 1-z \end{pmatrix}$$

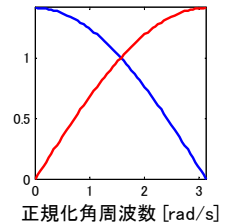
5/3 DWT

$$\begin{pmatrix} H_L(z) \\ H_H(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \left(1 - \frac{z+z^{-1}}{2}\right) \frac{z+z^{-1}}{4} \\ 1 - \frac{z+z^{-1}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$$

DCTとウェーブレット フィルタの周波数特性の違い

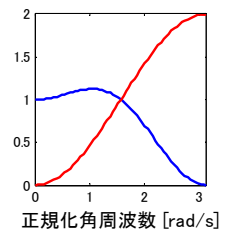
2点 DCT

$$\begin{pmatrix} |H_L(e^{j\omega})| \\ |H_H(e^{j\omega})| \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega/2) \\ \sin(\omega/2) \end{pmatrix}$$



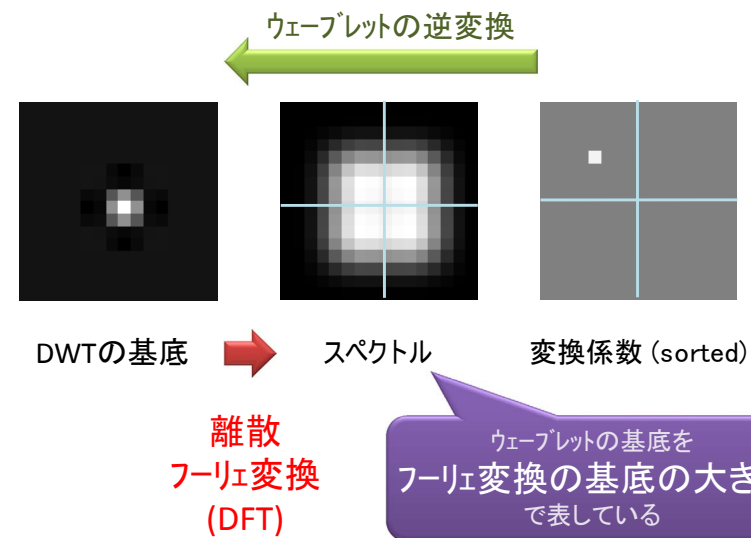
5/3 DWT

$$\begin{pmatrix} |H_L(e^{j\omega})| \\ |H_H(e^{j\omega})| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (1 - \cos \omega)(\cos \omega) / 2 \\ 1 - \cos \omega \end{pmatrix}$$

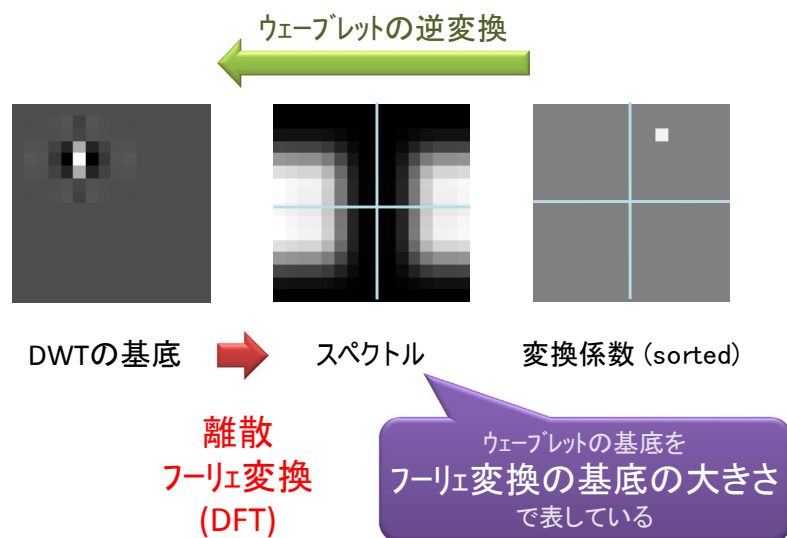


基底のスペクトル

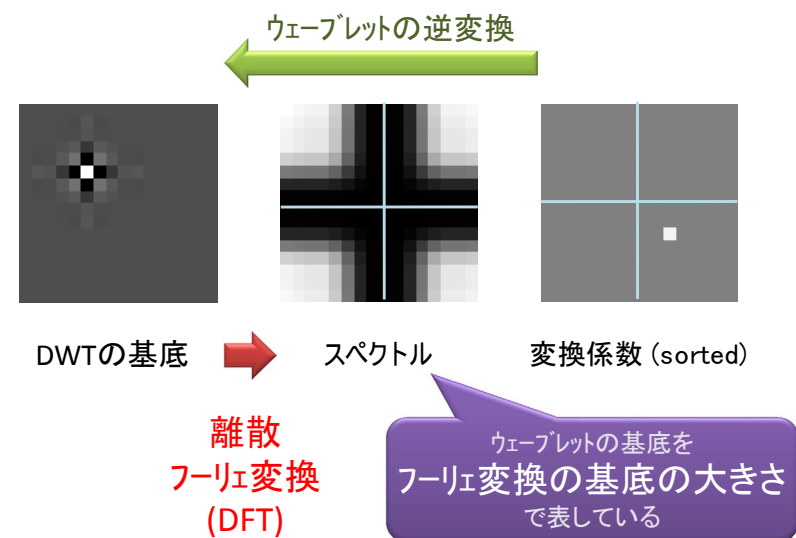
9/7 DWTの基底とそのスペクトル



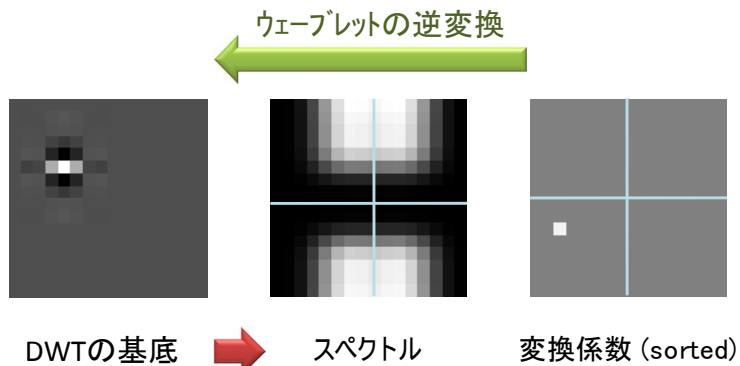
9/7 DWTの基底とそのスペクトル



9/7 DWTの基底とそのスペクトル



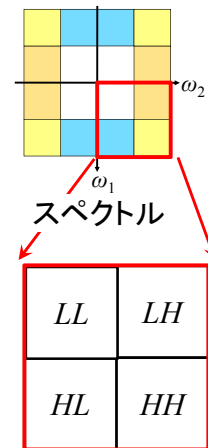
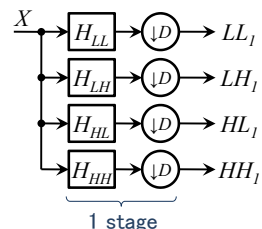
9/7 DWTの基底とそのスペクトル



離散
フーリエ変換
(DFT)

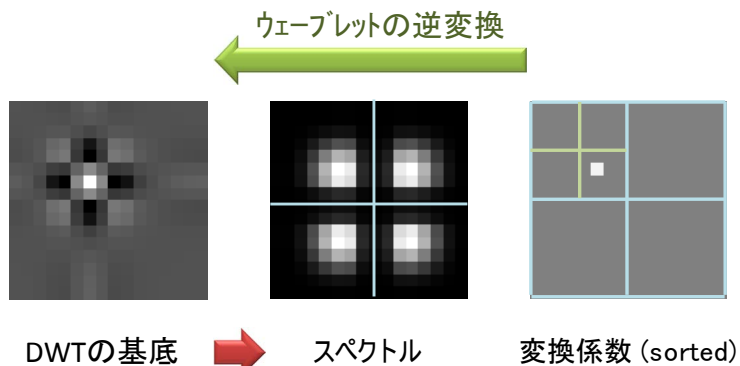
ウェーブレットの基底を
フーリエ変換の基底の大きさ
で表している

フィルタバンクによる 帯域分割



ウェーブレットの基底を
フーリエ基底の大きさ
で表している

9/7 DWTの基底とそのスペクトル



離散
フーリエ変換
(DFT)

ウェーブレットの基底を
フーリエ変換の基底の大きさ
で表している

フィルタバンクによる オクターブ分割

