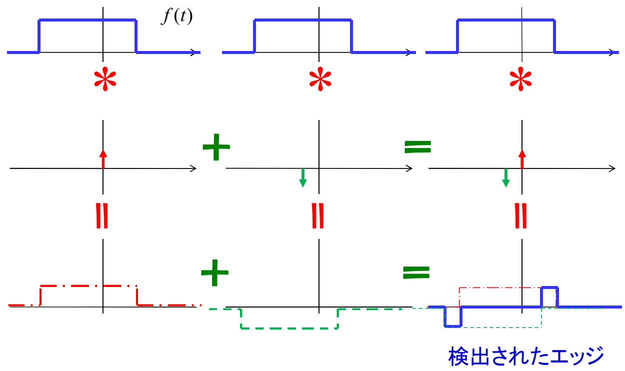
キホンの復習

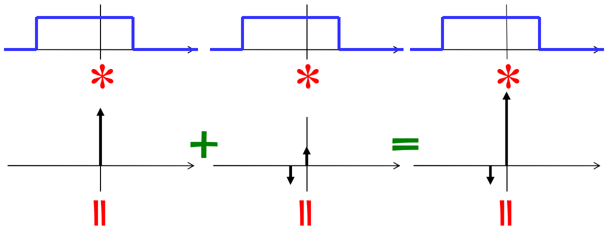
「たたみこみ」とは？

復習テストを
始める前に

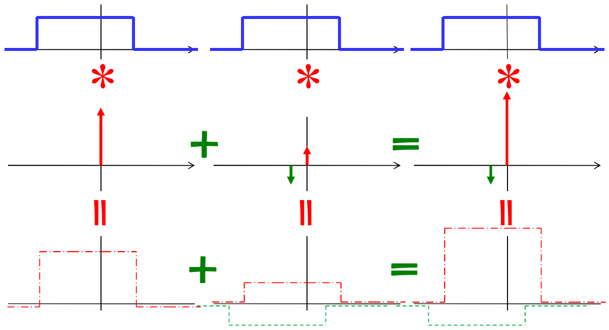
デルタ関数との「たたみこみ」



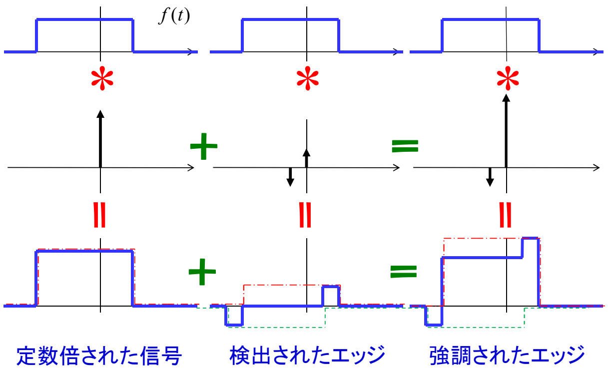
宿題の答えは？



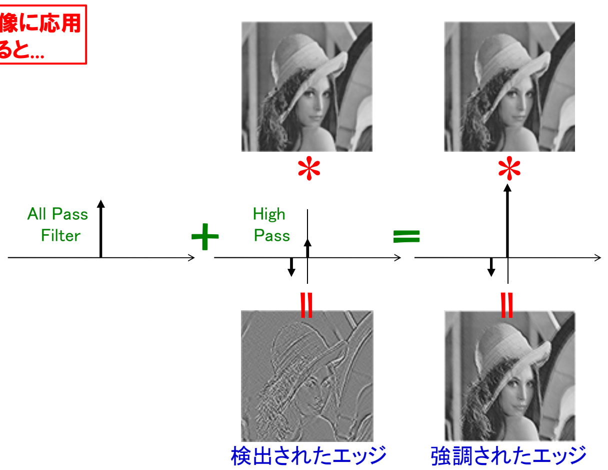
ヒント



解答



画像に応用すると...



再確認
フーリエ変換の
別の表現

復習テストを
始める前に

「$\mathcal{F}$」を使った表現

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$$

⇩

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

⇩

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$$

例えば…

p.128

問題5.7（別の表現）

$e^{j\omega_0 t}$ のフーリエ変換を求めよ

⇩

$$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)$$

⇩

$$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\right] = 2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)$$

例えば…

p.128

問題5.8（別の表現）

$f(t)=\cos\omega_0 t$ のフーリエ変換を求めよ

⇩

$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]$ を求めよ

$$\mathcal{F}\left[e^{\pm j\omega_0 t}\right]=2\pi\cdot\delta(\omega\mp\omega_0)$$ ←ヒント

例えば…

p.128

問題5.8（別の表現）

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]$$

$$=\mathcal{F}\left[\frac{e^{-j\omega_0 t}+e^{+j\omega_0 t}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\left[e^{-j\omega_0 t}\right]+\mathcal{F}\left[e^{+j\omega_0 t}\right]\right)$$

ヒントより

$$=\frac{1}{2}\left(2\pi\cdot\delta(\omega+\omega_0)+2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)\right)$$

復習テスト

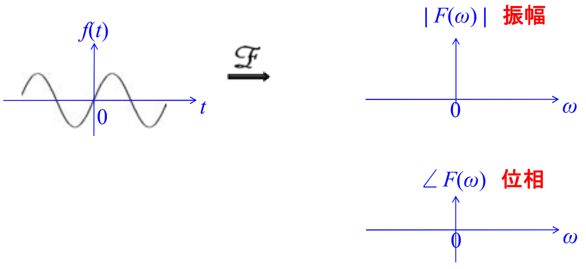
これが出来れば
期末は安心！

ノートに写す

問題1

問題5.8
p.128

$\mathcal{F}\,[\sin \omega_0 t]$ を求めよ



復習

問題1（ヒント）

式(5.51)
p.14

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

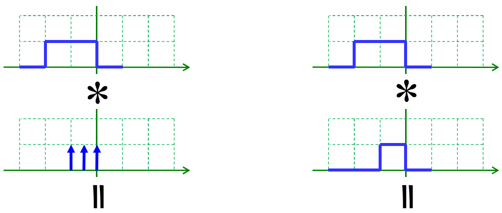
問題5.7
p.128

$$\mathcal{F}\left[e^{\pm j\omega_0 t}\right] = 2\pi \cdot \delta(\omega \mp \omega_0)$$

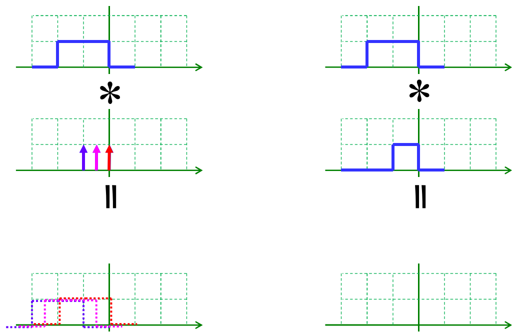
$$\mathcal{F}\left[\ 1\ \right] = 2\pi \cdot \delta(\omega)$$

ノートに写す

問題2



問題2（ヒント）



問題3

問題4.30
p.109

$f_1(t)$ と $f_2(t)$ の「たたみこみ」は、

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau \quad = \quad f_1(t) * f_2(t)$$

と定義される。以下を証明せよ。

$$f(t) * \delta(t) \quad = \quad f(t)$$

$$f(t) * \delta(t - t_0) \quad = \quad f(t - t_0)$$

復習テストの

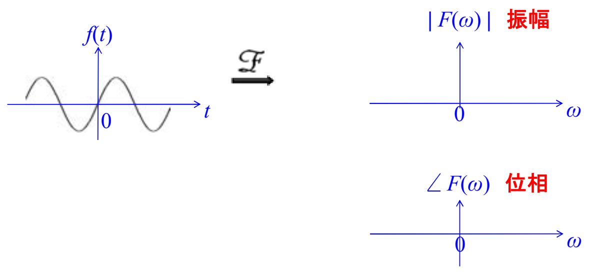
解説

ノートに写した

問題1

問題5.8
p.128

$\mathcal{F}[\sin \omega_0 t]$ を求めよ



復習

問題1（ヒント）

式(5.51)
p.14

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

問題5.7
p.128

$$\mathcal{F}\left[e^{\pm j\omega_0 t}\right] = 2\pi \cdot \delta(\omega \mp \omega_0)$$

$$\mathcal{F}[\ 1\ ] = 2\pi \cdot \delta(\omega)$$

問題1（解説）

問題5.8
p.128

$$\mathcal{F}[\sin \omega_0 t]$$

$$= \mathcal{F}\left[\frac{e^{+j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\mathcal{F}\left[e^{+j\omega_0 t}\right] - \mathcal{F}\left[e^{-j\omega_0 t}\right]\right)$$

ヒントより

$$= \frac{1}{\cancel{2}j}\left(\cancel{2}\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) - \cancel{2}\pi \cdot \delta(\omega + \omega_0)\right)$$

問題1（解説/続き）

問題5.8
p.128

$$\mathcal{F}[\sin \omega_0 t]$$

$$= \frac{1}{j} \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \frac{-1}{j} \cdot \pi \cdot \delta(\omega + \omega_0)$$

$$= e^{\frac{-\pi}{2}j} \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) + e^{\frac{+\pi}{2}j} \cdot \pi \cdot \delta(\omega + \omega_0)$$

位相 $-\pi/2$　振幅　　位相 $+\pi/2$　振幅

参考

オイラーの公式

$$e^{j x} = \cos x + j \sin x$$

位相

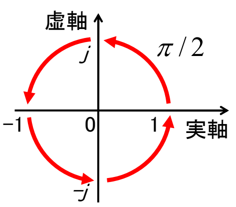
$e^{0 \cdot j} = \cos 0 + j \sin 0 = +1$

$e^{\pi \cdot j} = \cos \pi + j \sin \pi = -1$

$e^{+\pi/2 \cdot j} = \cos\frac{1\cdot\pi}{2} + j \sin\frac{1\cdot\pi}{2} = +j = -1/j$

$e^{-\pi/2 \cdot j} = \cos\frac{-\pi}{2} + j \sin\frac{-\pi}{2} = -j = +1/j$

位相



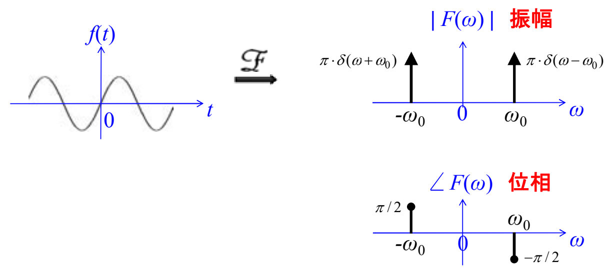
複素平面（ガウス平面）

ノートに写す

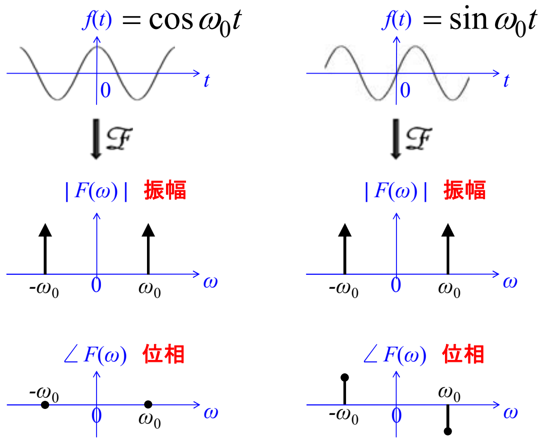
問題1（解答）

問題5.8
p.128

$\mathcal{F}[\sin \omega_0 t]$ を求めよ



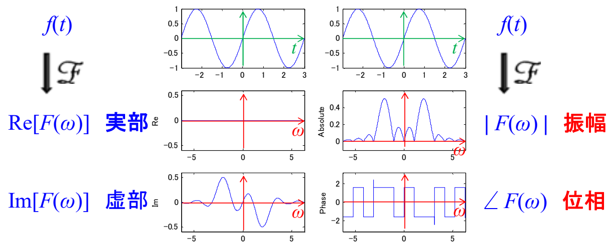
まとめ



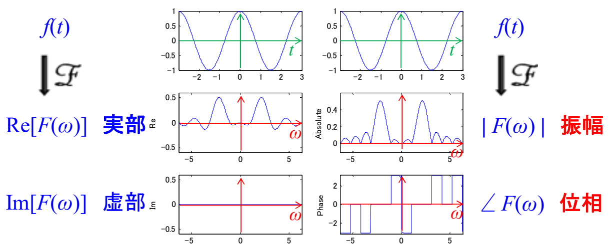
位相の違いは聞いても分からない？

$f(t) = \sin(\omega_0 t)$

コンピュータで計算すると…



$f(t) = \cos(\omega_0 t)$

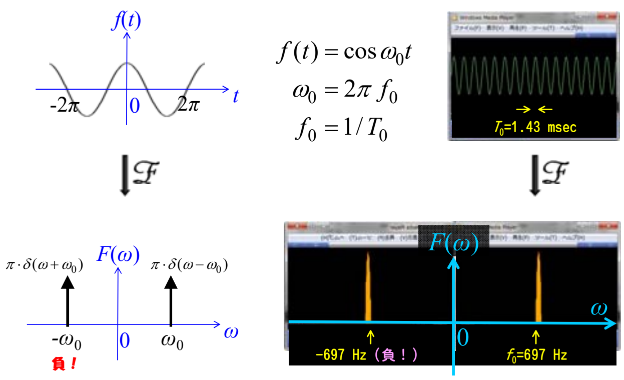


「負」の周波数

$f(t) = \cos\omega_0 t$

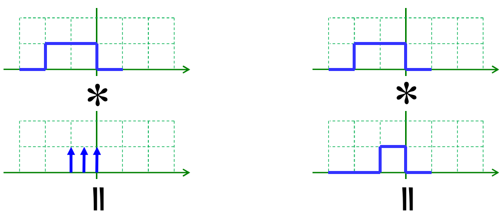
$\omega_0 = 2\pi f_0$

$f_0 = 1/T_0$

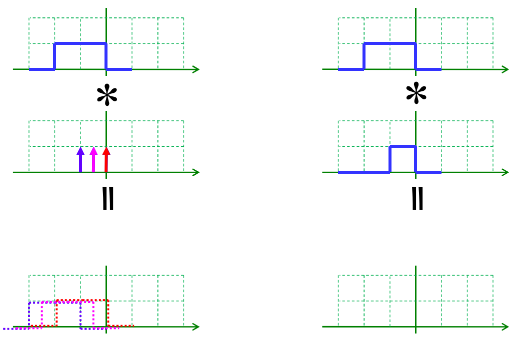


ノートに写した

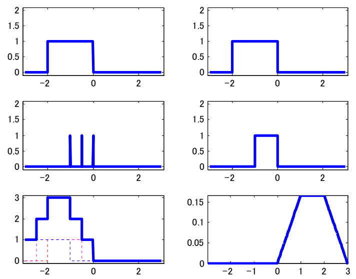
問題２



問題２（ヒント）



Matlab



```
N=2^10;

%---------------------- time domain
for m=1:N;
  t(m)=(m-N/2)/N*6;
   if((t(m)>-2)&&(t(m)<0)) f(m)=1;
   else                f(m)=0;
   end;
end;
m=1:N;
subplot(3,2,1); plot(t(m),f(m),'b-','LineWidth',3); axis([-3.1 3.1 -.1
subplot(3,2,2); plot(t(m),f(m),'b-','LineWidth',3); axis([-3.1 3.1 -.1

%---------------------- convolution / digital
T=-round(N/12);
f1=circshift(f',T*0)';
f2=circshift(f',T*1)';
f3=circshift(f',T*2)';

subplot(3,2,5); plot(t(m),f1(m),'r:'); hold on;
subplot(3,2,5); plot(t(m),f2(m),'m:'); hold on;
subplot(3,2,5); plot(t(m),f3(m),'b:'); axis([-3.1 3.1 -.1 3.1]);
subplot(3,2,5); plot(t(m),f1(m)+f2(m)+f3(m),'b-','LineWidth',3);

h(m)=0;
h(T*0+N/2)=1; h(T*1+N/2)=1; h(T*2+N/2)=1;
subplot(3,2,3); plot(t(m),h(m),'b-','LineWidth',3);
axis([-3.1 3.1 -.1 2.1]);

%---------------------- convolution / analog
for m=1:N;
  t(m)=(m-N/2)/N*6;
   if((t(m)>-1)&&(t(m)<0)) h(m)=1;
   else                h(m)=0;
   end;
end;
m=1:N;
subplot(3,2,4); plot(t(m),h(m),'b-','LineWidth',3); axis([-3.1 3.1 -.1

for m=1:N;
  Re=0;
  for u=1:N;
   v=m-u;  if(v<1);v=1;end; if(v>N);v=N;end;
   w=u; if(w<1);w=1;end; if(w>N);w=N;end;
    Re=Re+h(w)*f(v);
  end;
  g(m)=Re/N;
end;
m=1:N;
subplot(3,2,6); plot(t(m),g(m),'b-','LineWidth',3); axis('tight');
```

問題3

問題4.30
p.109

$f_1(t)$ と $f_2(t)$ の「たたみこみ」は、

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau \quad = \quad f_1(t) * f_2(t)$$

と定義される。以下を証明せよ。

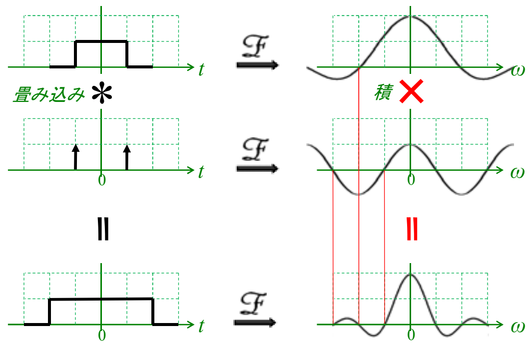
$$f(t) * \delta(t-t_0) \quad = \quad f(t-t_0)$$

詳説は省略。教科書の該当箇所を、よく勉強しておくこと。

今日、新しく
習うこと

重要

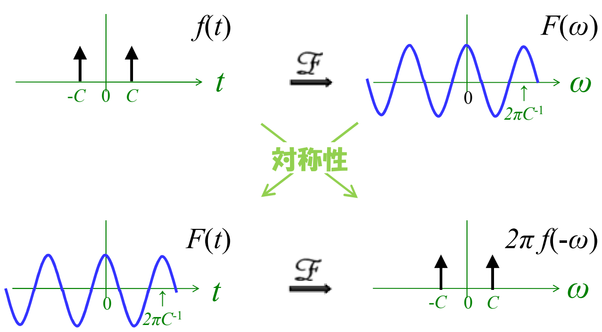
畳み込み → 積
（時間領域）　（周波数領域）



参考

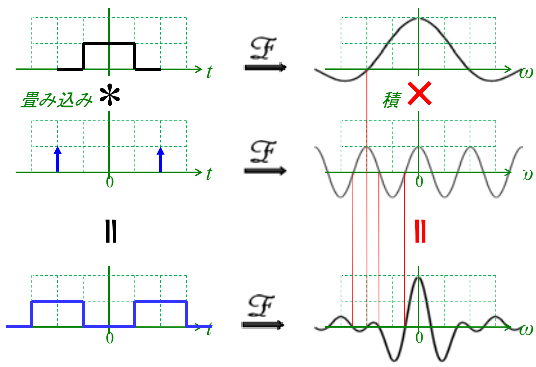
対称性

問題5.4
p.126



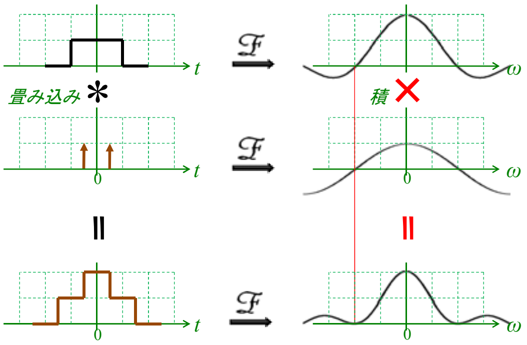
他の例（1）

畳み込み → 積
（時間領域）　（周波数領域）



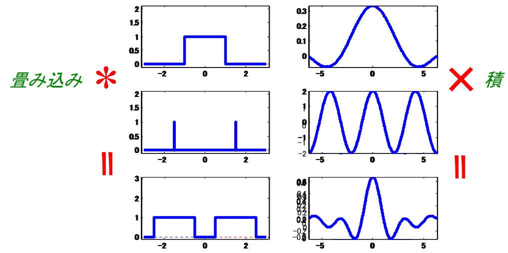
他の例（2）

畳み込み → 積
（時間領域）　（周波数領域）



アニメ

畳み込み → 積
（時間領域）　（周波数領域）



畳み込み → 積
（時間領域）　（周波数領域）

問題4.31
p.109

$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$

畳み込み $*$　　積 ×

$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$

‖　　‖

$f_1(t)*f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

ノートに写す

畳み込み → 積
（時間領域）　（周波数領域）

問題4.30
p.109

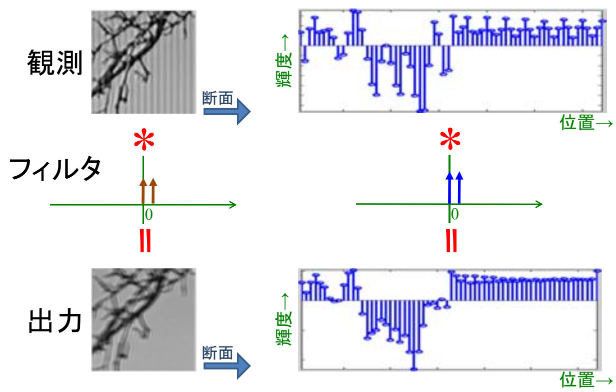
$$\mathcal{F}\left[f_1(t)*f_2(t)\right] = F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

⇧⇩

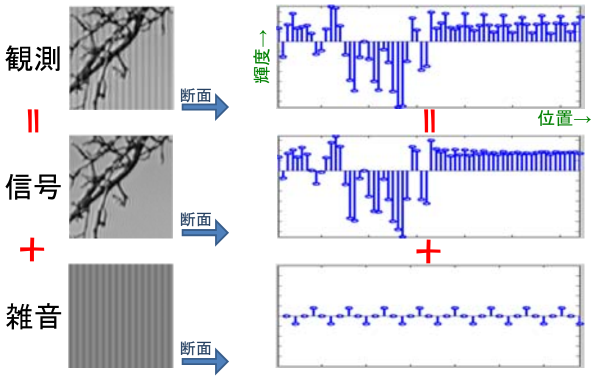
$$f_1(t)*f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

「フィルタ」で
雑音を除去する

画像の縞模様を、フィルタで消す

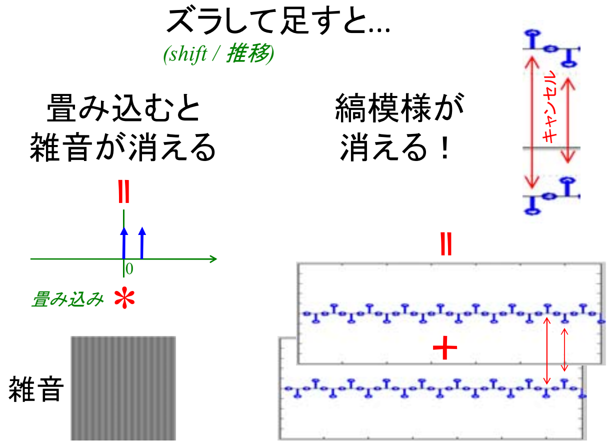


何故、縞模様を消せる？

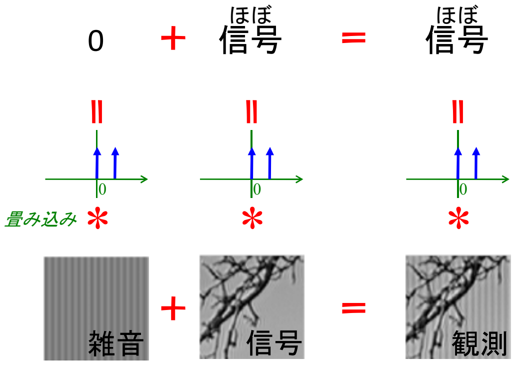


ズラして足すと...

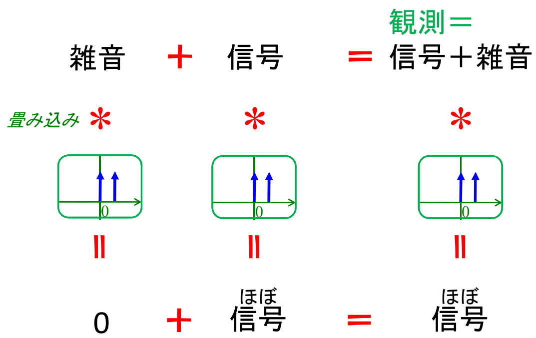
(shift / 推移)



縞模様を消せる！



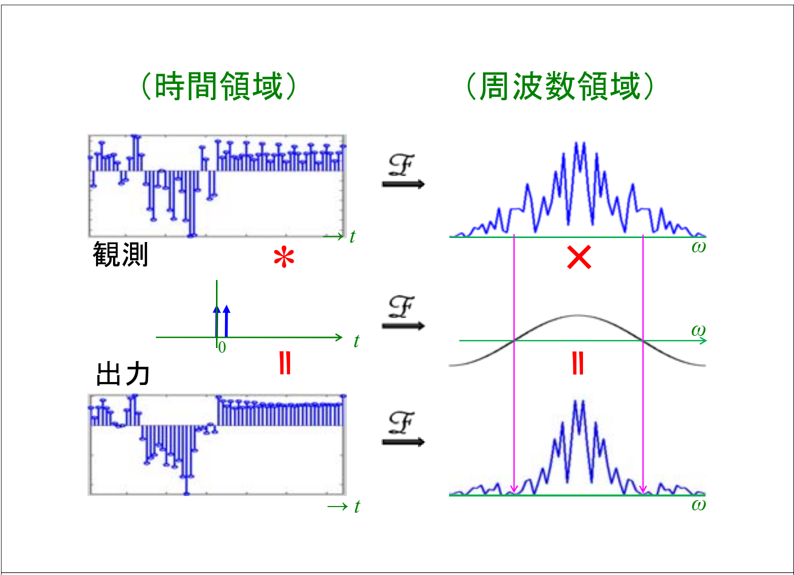
まとめ

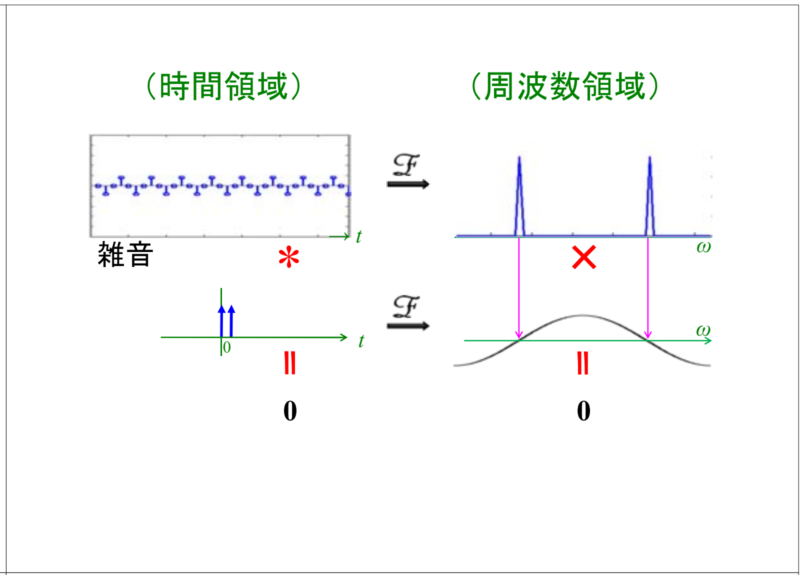


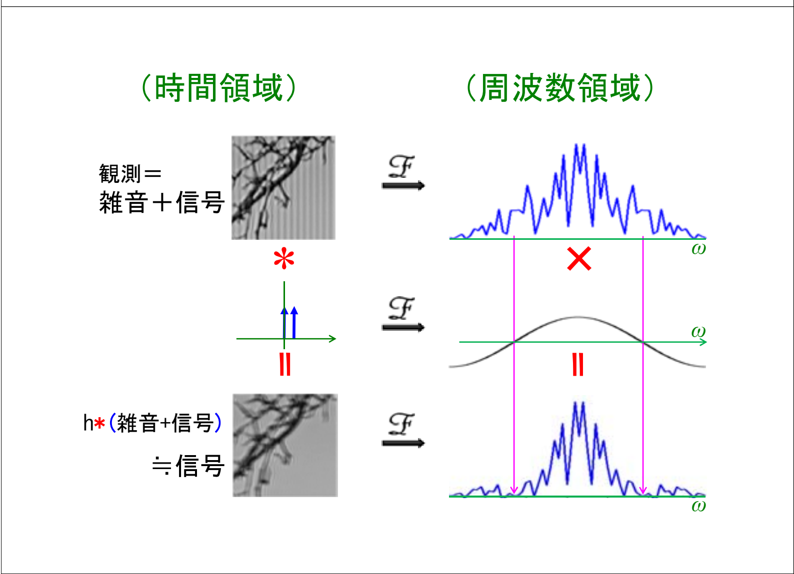
フィルタによる雑音除去

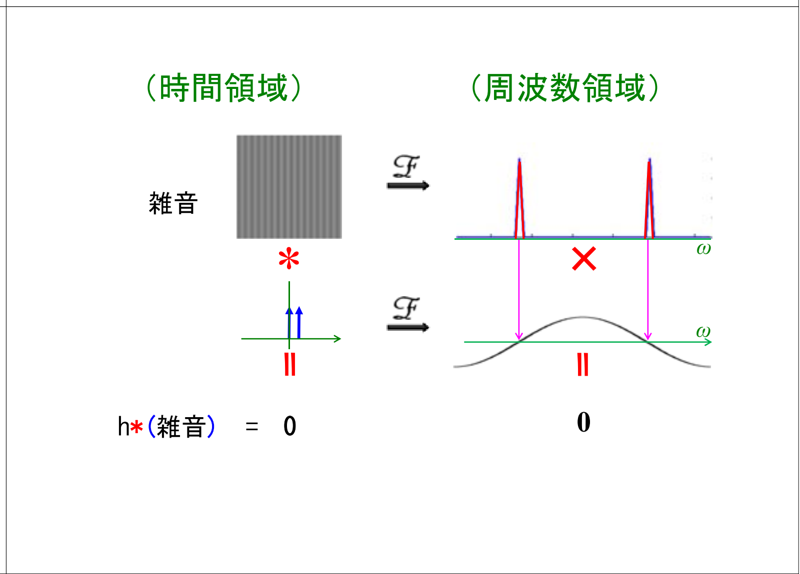
h＊(観測)	*観測信号を フィルタに通す*
＝h＊(信号 ＋ 雑音)	*観測時に 雑音が加わった*
＝h＊ 信号 ＋ h＊雑音	*フィルタは線形*
＝h＊ 信号 ＋ 0	*雑音は通さない*
≒ 信号	*信号は通す*

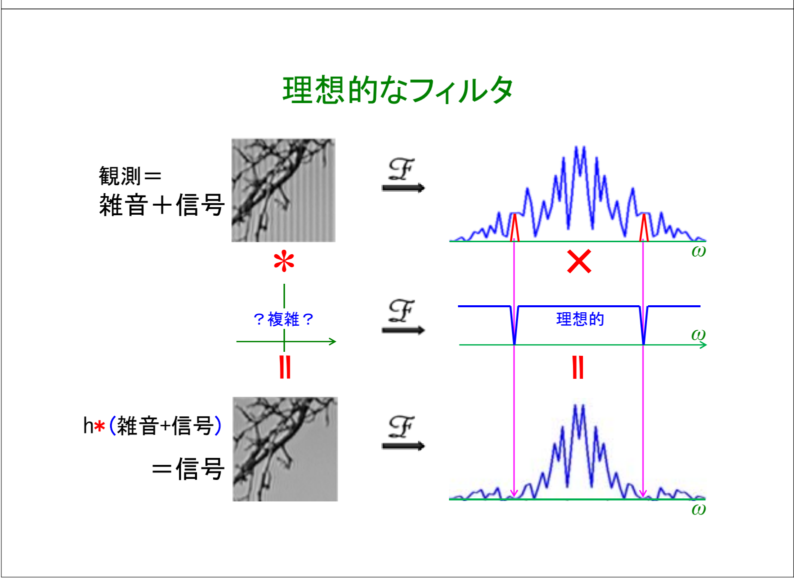
「フィルタ」を
周波数領域で
考える

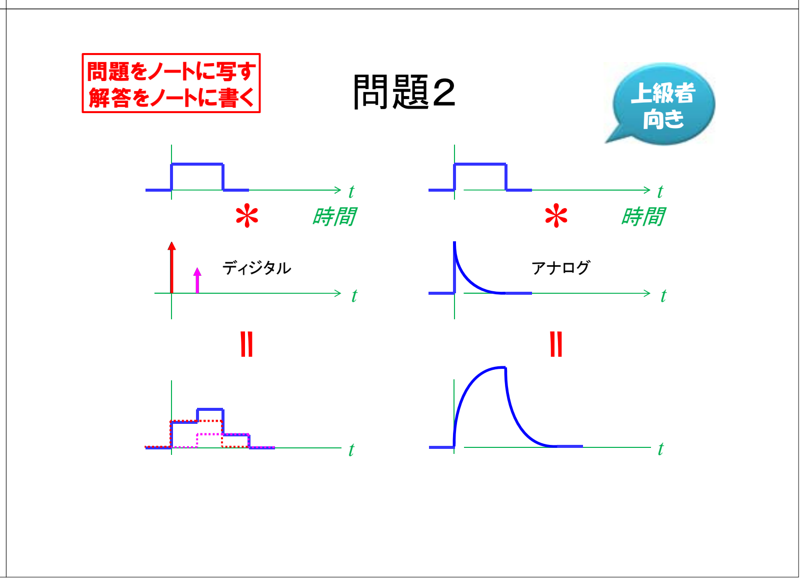

（時間領域）
（周波数領域）
観測
＊
×
出力
＝
ω
t


（時間領域）
（周波数領域）
雑音
＊
×
＝
0
0
ω
t


（時間領域）
（周波数領域）
観測＝
雑音＋信号
＊
×
＝
h＊(雑音+信号)
≒信号
ω

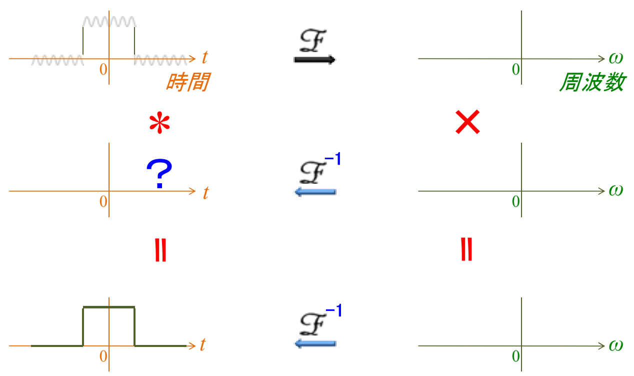

（時間領域）
（周波数領域）
雑音
＊
×
＝
h＊(雑音) = 0
0
ω


理想的なフィルタ
観測＝
雑音＋信号
＊
×
？複雑？
理想的
＝
h＊(雑音+信号)
＝信号
ω


問題をノートに写す
解答をノートに書く
問題2
上級者
向き
＊
時間
ディジタル
アナログ
＝
t

問題をノートに写す
解答をノートに書く

問題1



宿題

ノートに写す

今日の宿題　1/2

問題 4. 8 （実数→振幅は偶関数）

問題 4.34 ← 難しくて解けない？

問題 5.31 （デルタ関数との畳み込み）

ノートに写す

今日の宿題　2/2