

# 可逆符号化のための整数ウェーブレットにおける乗算器係数の感度解析

倉重 宏之<sup>†</sup> モンフバートルデルゲルマ<sup>†</sup> 岩橋 政宏<sup>††</sup>

<sup>†</sup> 長岡技術科学大学 工学部 電気系 〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1  
E-mail: <sup>†</sup>{hkurasige,delgermaa}@tech.nagaokaut.ac.jp, <sup>††</sup>iwahashi@vos.nagaokaut.ac.jp

あらまし 信号値が整数表現される整数ウェーブレット変換は、可逆・非可逆統合符号化の一手法として近年注目されており、その乗算器係数値は実数として与えられることがある。この実数乗算を2のべき乗和で近似することで演算負荷の軽減が可能となり、リアルタイム・ソフトウェア・デコーダや機能メモリにおいて有効となると考えられる。そこで本報告では、近似誤差すなわち乗算器係数の短語長化誤差がウェーブレット内部をどのように伝播するかを調べ、再生信号の劣化量を理論的に解析する。結果として、帯域信号の自己相関、相互相関、誤差変動の微小性が、再生信号における短語長化誤差の分散値にどのように影響するかが解明された。すなわち、自己相関係数の次数の変化による理論値と実験値の関係から、再生信号における誤差分散が帯域信号の自己相関に大きく依存していることが分かった。加えて、自己相関のみを考慮した理論値と、自己相関と相互相関を共に考慮した理論値の関係から、帯域信号の相互相関にはあまり依存していないことを示した。また、高次項まで含めた理論値と含めない理論値の関係から、乗算器によって高次項の影響が大きい場合と小さい場合があることを示した。

キーワード ウェーブレット, 乗算器係数, 語長, 感度

## Sensitivity analysis of multiplier coefficients for integer wavelet

Hiroyuki KURASIGE<sup>†</sup>, Munkhbaatar DELGERMAA<sup>†</sup>, and Masahiro IWAHASHI<sup>††</sup>

<sup>†</sup> Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Nagaoka University of Technology  
Kamitomioka 1603-1, Nagaoka-shi, Niigata, 940-2188, Japan

E-mail: <sup>†</sup>{hkurasige,delgermaa}@tech.nagaokaut.ac.jp, <sup>††</sup>iwahashi@vos.nagaokaut.ac.jp

**Abstract** The lifting structured wavelet transform is applied to various image data compression techniques. This report aims at analyzing errors caused by shorting word length of the multiplier coefficients contained in those wavelet transforms. It is clarified how the errors propagate through the wavelet transform and how much the error variance will be in the reconstructed signal. As a result, it is shown that how the auto-correlation and cross-correlation of the band signals influence on the error variance.

**Key words** Wavelet, Multiplier Coefficient, Word Length, Sensitivity

### 1. はじめに

信号値が整数表現される整数ウェーブレット変換は可逆・非可逆統合符号化の一手法として近年注目されており、その乗算器係数値は実数として与えられることがある [1], [2]。この実数乗算を2のべき乗和で近似することで演算負荷の軽減が可能となり、リアルタイム・ソフトウェア・デコーダや機能メモリにおいて有効となると考えられる。そこで本報告では、近似誤差、すなわち乗算器係数の短語長化誤差がウェーブレット内部をどのように伝播するかを調べ、加法性・線形性を仮定し、再生信号の劣化量を理論的に解析する。

これにより、帯域信号の自己相関、相互相関、誤差変動の微

小性が再生信号における短語長化誤差の分散値にどのように影響するかを明らかにする。

### 2. ウェーブレットと乗算器係数

#### 2.1 ウェーブレット

本報告では、ウェーブレットとしてその乗算器係数が実数で与えられる9/7フィルタを取り上げる [1]。

##### 2.1.1 1次元1ステージ

1次元1ステージの場合を図1に示す。太字は行列を表し、'付きはデコード側を表すとする。入力信号  $X(z)$ 、帯域信号  $Y(z)$ 、出力信号  $X'(z)$  をそれぞれ、

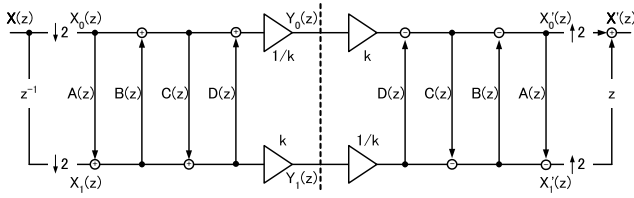


図1 ウェーブレット 9/7 フィルタ (1次元 1 ステージ)

Fig.1 Wavelet 9/7 Filter (1Dimension 1Stage).

$$\mathbf{X}(z) \equiv \begin{pmatrix} X_0(z) \\ X_1(z) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{Y}(z) \equiv \begin{pmatrix} Y_0(z) \\ Y_1(z) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{X}'(z) \equiv \begin{pmatrix} X'_0(z) \\ X'_1(z) \end{pmatrix} \quad (3)$$

と表すと、各信号の関係は以下ようになる。

$$\mathbf{X}'(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ z^{-1} & -z^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_0(z^2) \\ X'_1(z^2) \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{X}'(z) = \mathbf{W}^{-1}(z) \mathbf{Y}(z) \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{W}(z) \mathbf{X}(z) \quad (6)$$

$$\mathbf{X}(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z^{-1/2} & -z^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{pmatrix} \quad (7)$$

但し、

$$\mathbf{W}^{-1}(z) \equiv \mathbf{A}^{-1}(z) \mathbf{B}^{-1}(z) \mathbf{C}^{-1}(z) \mathbf{D}^{-1}(z) \mathbf{K}^{-1}(z) \quad (8)$$

$$\mathbf{W}(z) \equiv \mathbf{K}(z) \mathbf{D}(z) \mathbf{C}(z) \mathbf{B}(z) \mathbf{A}(z) \quad (9)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a(1+z^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}(z) = \begin{pmatrix} 1 & b(1+z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c(1+z^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{D}(z) = \begin{pmatrix} 1 & d(1+z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{K}(z) = \begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} a = -1.58613 43420 59924 \\ b = -0.05298 01185 72961 \\ c = 0.88291 10755 30934 \\ d = 0.44350 68520 43971 \\ k = 1.23017 41049 14001 \end{cases} \quad (11)$$

である。

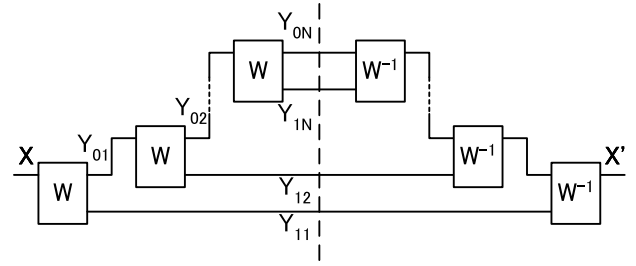


図2 ツリー構造 (1次元 N ステージ)

Fig.2 Tree Structure (1Dimension N-Stage).

### 2.1.2 1次元 N ステージ

1次元 N ステージは、1次元 1 ステージの低域側を再分割する、ツリー構造によって実現できる(図2)。ここで帯域信号  $Y_{ij}$  の添え字  $i, j$  を、

$$Y_{ij} \begin{cases} i: \text{低域}(0) \text{ または 高域}(1) \\ j: \text{ステージ数} \end{cases}$$

とすると、1次元 N ステージの  $i$  ステージ目の出力信号  $X'_i(z)$  は、次のように表せる。

$$X'_i(z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & z \\ z^{-1} & -z^{-1/2} \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1}(z^2) \begin{pmatrix} X'_{i-1}(z^2) \\ Y_{1,1+N-i}(z^2) \end{pmatrix} & n \neq 0 \\ Y_{0N}(z) & n = 0 \end{cases} \quad (12)$$

### 2.2 乗算器係数の短語長化と近似誤差

以下、本報告では、 $\hat{h}$  付きが近似された係数、 $\Delta h$  が近似誤差を表すものとする。ここで、 $h$  は式(11)における  $a, b, c, d, k$  のいずれかである。すなわち、近似係数  $\hat{h}$  を、

$$\hat{h} = h + \Delta h \quad (13)$$

と表す。次に、2 のべき乗和による近似係数の実現法を示す。

$$\hat{h} = (-1)^{B_0} \sum_{i=1}^L B_i 2^{-i} \quad (14)$$

$$\begin{cases} B_i: 0 \text{ または } 1 \\ L: \text{語長 (word length)} \end{cases}$$

式(14)において語長  $L$  を変化させた時、その最小の誤差  $\Delta h$  を図3に示した。

2 のべき乗和で乗算器係数を近似するという条件があるので、グラフは階段状になる。つまり、語長を割り当てるとき、傾きが平らなところの一番左の点が示す語長を割り当てると効率が良い。

### 3. 短語長化誤差の解析

本節から、具体的な誤差解析に入る。以下、信号のエルゴード性とシステムの線形性を仮定して議論する。ここで、式(13)の誤差は、デコード側にのみ与えるものとする。これは、リア

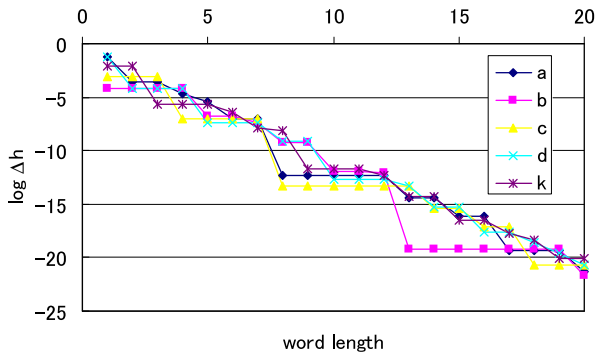


図3 ビットシフトによる係数の実現

Fig. 3 Representation of coefficients by bit-shift.

ルタイム・ソフトウェア・デコーダを想定しているからである。本報告では、誤差の伝搬を理論的に求め、近似誤差への以下の影響を調べる。

- [影響1] 帯域信号の自己相関
- [影響2] 帯域間の相互相関
- [影響3] 高次項の影響

### 3.1 誤差の導出

誤差はデコード側のみ与えるので、式(5)は以下のように改められる。

$$\hat{X}'(z) = \hat{W}^{-1}(z) Y(z) \quad (15)$$

但し、

$$\hat{W}^{-1}(z) \equiv \hat{A}^{-1}(z) \hat{B}^{-1}(z) \hat{C}^{-1}(z) \hat{D}^{-1}(z) \hat{K}^{-1}(z) \quad (16)$$

である。

次に、誤差  $E(z)$  を導出する。1次元1ステージの場合、式(6)および式(15)より、

$$E(z) \equiv \begin{pmatrix} E_0(z) \\ E_1(z) \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$= \hat{X}'(z) - X'(z) \quad (18)$$

$$= \hat{X}'(z) - X(z) \quad (19)$$

$$= \hat{W}^{-1}(z) Y(z) - W^{-1}(z) Y(z) \quad (20)$$

$$= (\hat{W}^{-1}(z) - W^{-1}(z)) Y(z) \quad (21)$$

である。いま、

$$\Delta W^{-1}(z) \equiv \hat{W}^{-1}(z) - W^{-1}(z) \quad (22)$$

と置くと、

$$E(z) = \Delta W^{-1}(z) Y(z) \quad (23)$$

となる。ここで、フィルタ係数  $h$  を含む伝達関数を  $H(z)$  とした時、 $h$  が  $h + \Delta h$  だけ微小変化したときの伝達関数  $\hat{H}(z)$  は、線形性を仮定すると、

$$\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n H(z)}{\partial h^n} (\Delta h)^n \quad (24)$$

$$= H(z) + \frac{\partial H(z)}{\partial h} \Delta h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H(z)}{\partial h^2} (\Delta h)^2 + \dots \quad (25)$$

と展開できる。これを式(23)に適用すると、

$$E(z) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n W^{-1}(z)}{\partial h^n} (\Delta h)^n \right) Y(z) \quad (26)$$

$$= \left( \frac{\partial W^{-1}(z)}{\partial h} (\Delta h) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W^{-1}(z)}{\partial h^2} (\Delta h)^2 + \dots \right) Y(z) \quad (27)$$

$$\equiv \psi_h^{(1)}(z) \cdot \Delta h Y(z) + \frac{1}{2} \psi_h^{(2)}(z) \cdot (\Delta h)^2 Y(z) + \dots \quad (28)$$

となる。以下、右辺第  $n$  項までの誤差値を「 $n$  次項誤差」と呼ぶことにする。

上式は、ある1つの乗算器係数を近似した場合である。5つの乗算器係数  $a, b, c, d, k$  の全てを近似した場合、誤差の加法性を仮定すると、

$$E(z) = \sum_h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \psi_h^{(n)}(z) \cdot (\Delta h)^n Y(z) \quad (29)$$

となる。ここで、

$$\psi_h^{(n)}(z) \equiv \begin{pmatrix} \langle \psi_h^{(n)}(z) \rangle_{11} & \langle \psi_h^{(n)}(z) \rangle_{12} \\ \langle \psi_h^{(n)}(z) \rangle_{21} & \langle \psi_h^{(n)}(z) \rangle_{22} \end{pmatrix} \quad (30)$$

と置く。

[例1] 1次元1ステージにおいて、乗算器係数  $a$  のみを近似した場合の1次項誤差は、次のようになる。

$$\begin{cases} \langle \psi_a(z) \rangle_{11} = 0 \\ \langle \psi_a(z) \rangle_{12} = 0 \\ \langle \psi_a(z) \rangle_{21} = \{-bc(z+z^{-2}) - (3bc+1)(1+z^{-1})\}k \\ \langle \psi_a(z) \rangle_{22} = \{bcd(z^2+z^{-2}) + (4bcd+b+d)(z+z^{-1}) \\ \quad + 2(3bcd+b+d)\}/k \end{cases} \quad (31)$$

[注意3.1]  $\psi_c(z)$  および  $\psi_d(z)$  は、 $\psi_a(z)$  および  $\psi_b(z)$  から求まる。

$$\begin{aligned} \psi_c(z | a, b, c, d) &= \psi_b^*(z | d, c, b, a) \\ \psi_d(z | a, b, c, d) &= \psi_a^*(z | d, c, b, a) \end{aligned} \quad (32)$$

$\psi^*$ :  $\psi$  の共役転置行列

上段の式は、 $\psi_c(z)$  が  $\psi_b(z)$  の要素  $a$  と  $d$  および  $b$  と  $c$  を入れ替えて、更に共役転置をとれば求まることを表す。下段の  $\psi_d(z)$  と  $\psi_a(z)$  の式についても同様である。これは、リフティングの性質による。

1次元  $N$  ステージの場合の誤差は、上記の例と同様にして求めることができる。

### 3.2 誤差分散の導出

#### 3.2.1 相関とノルム

ここで、誤差分散を導出するための準備として、自己相関、相互相関、ノルムについてまとめる。

ある信号  $y_0(t)$  の  $\tau$  次の自己相関  $\Theta_{y_0}(\tau)$  は、

$$\Theta_{y_0}(\tau) = \mathcal{E}[y_0(t)y_0(t-\tau)] \quad (33)$$

で定義される。ここで、 $\mathcal{E}[x]$  は、 $x$  の  $t$  に関するアンサンブル平均を表す。また、別のある信号  $y_1(t)$  があるとき、 $y_0(t)$  と  $y_1(t)$  の  $\tau$  次の相互相関  $\Theta_{y_0y_1}(\tau)$  は、

$$\Theta_{y_0y_1}(\tau) = \mathcal{E}[y_0(t)y_1(t-\tau)] \quad (34)$$

と定義される。また、信号  $X(z)$  のノルムは、

$$\|X(z)\| = \mathcal{E}[x(t)] \quad (35)$$

$$\|X(z)\|^2 = \mathcal{E}[x^2(t)] \quad (36)$$

と定義される。ここで、 $x(t)$  は  $X(z)$  の時間領域での表現である。

#### 3.2.2 相関を考慮した誤差分散の導出

誤差分散  $\sigma_E^2$  を導出する。これは、式 (29) のノルムとして求めることができ、スカラー値となる。

各帯域信号の誤差分散を  $\sigma_{e_i}^2$  とすると、再生信号における誤差分散  $\sigma_E^2$  は、

$$\sigma_E^2 = \sum_{i=0}^N w_i \sigma_{e_i}^2 \quad (37)$$

$$\sigma_{e_i}^2 = \|E_i(z)\|^2 \quad (38)$$

となる。ここで、 $w_i$  は重み係数である。1次元1ステージの場合、 $N=1$ 、 $w_0=w_1=1/2$  であるから、式 (37) は、

$$\sigma_E^2 = \frac{\sigma_{e_0}^2 + \sigma_{e_1}^2}{2} \quad (39)$$

となる。 $\sigma_{e_0}^2$ 、 $\sigma_{e_1}^2$  は、

$$\begin{pmatrix} \sigma_{e_0}^2 \\ \sigma_{e_1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|E_0(z)\|^2 \\ \|E_1(z)\|^2 \end{pmatrix} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_h (\Delta h)^{2n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \\ &\quad \cdot \left[ \left\| \langle \psi_h^{(n)}(z) \rangle_{11} Y_0(z) \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \langle \psi_h^{(n)}(z) \rangle_{21} Y_0(z) \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \langle \psi_h^{(n)}(z) \rangle_{12} Y_1(z) \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \langle \psi_h^{(n)}(z) \rangle_{22} Y_1(z) \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| 2 \langle \psi_h^{(n)}(z) \rangle_{11} Y_0(z) \langle \psi_h^{(n)}(z) \rangle_{12} Y_1(z) \right\| \right. \\ &\quad \left. + \left\| 2 \langle \psi_h^{(n)}(z) \rangle_{21} Y_0(z) \langle \psi_h^{(n)}(z) \rangle_{22} Y_1(z) \right\| \right] \quad (41) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{E}[e_0^2(t)] \\ \mathcal{E}[e_1^2(t)] \end{pmatrix} \quad (42)$$

である。

[例2] 1次元1ステージにおいて、乗算器係数  $a$  のみを近似した場合の1次項誤差から、相関を考慮した分散(ノルム)を求める。いま、式 (31) より、

$$\langle \psi_a(z) \rangle_{11} = \langle \psi_a(z) \rangle_{12} = 0 \quad (43)$$

すなわち、

$$\sigma_{e_0}^2 = 0 \quad (44)$$

であるから、 $\sigma_{e_1}^2$  のみを考えればよい。

$$\begin{aligned} \sigma_{e_1}^2 &= \left( \left\| \langle \psi_a^{(1)}(z) \rangle_{21} Y_0(z) \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \langle \psi_a^{(1)}(z) \rangle_{22} Y_1(z) \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| 2 \langle \psi_a^{(1)}(z) \rangle_{21} Y_0(z) \langle \psi_a^{(1)}(z) \rangle_{22} Y_1(z) \right\| \right) \cdot (\Delta a)^2 \quad (45) \end{aligned}$$

ここで、上式を、自己相関と相互相関の和として、

$$\sigma_{e_1}^2 \equiv \sum_{\tau=0}^{\infty} (\theta_{\tau}^{(0)} \Theta_{y_0}(\tau) + \theta_{\tau}^{(1)} \Theta_{y_1}(\tau) + \theta_{\tau}^{(01)} \Theta_{y_0y_1}(\tau)) \quad (46)$$

と置くと、上式の各項は以下のようになる。

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau=0}^{\infty} \theta_{\tau}^{(0)} \Theta_{y_0}(\tau) \\ &= \{2(10b^2c^2 + 6bc + 1) \Theta(0) \\ &\quad + 2(3bc + 1)(5bc + 1) \Theta(1) \\ &\quad + 2b^2c^2 \Theta(2) \\ &\quad + 4bc(3bc + 1) \Theta(3)\} k^2 \cdot (\Delta a)^2 \sigma_{y_0}^2 \quad (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau=0}^{\infty} \theta_{\tau}^{(1)} \Theta_{y_1}(\tau) \\ &= \{2(35b^2c^2d^2 + 20bcd^2 + 3d^2 + 20b^2cd + 6bd + 3b^2) \Theta(0) \\ &\quad + 4(4bcd + d + b)(7bcd + 2d + 2b) \Theta(1) \\ &\quad + 2(28b^2c^2d^2 + 12bcd^2 + d^2 + 12b^2cd + 2bd + b^2) \Theta(2) \\ &\quad + 4bcd(4bcd + d + b) \Theta(3) \\ &\quad + 2b^2c^2d^2 \Theta(4)\} / k^2 \cdot (\Delta a)^2 \sigma_{y_1}^2 \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau=0}^{\infty} \theta_{\tau}^{(01)} \Theta_{y_0y_1}(\tau) \\ &= \{(-35b^2c^2d - 20bcd - 3d - 10b^2c - 3b) \Theta(0) \\ &\quad + (-56b^2c^2d - 30bcd - 4d - 15b^2c - 4b) \Theta(1) \\ &\quad + (-28b^2c^2d - 12bcd - d - 6b^2c - b) \Theta(2) \\ &\quad - bc(8bcd + 2d + b) \Theta(3) \\ &\quad - b^2c^2d \Theta(4)\} \cdot (\Delta a)^2 \sigma_{y_0y_1}^2 \quad (49) \end{aligned}$$

結局、

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^{\infty} (\theta_{\tau}^{(0)} \Theta_{y_0}(\tau) + \theta_{\tau}^{(1)} \Theta_{y_1}(\tau) + \theta_{\tau}^{(01)} \Theta_{y_0y_1}(\tau)) \quad (50)$$

となる。

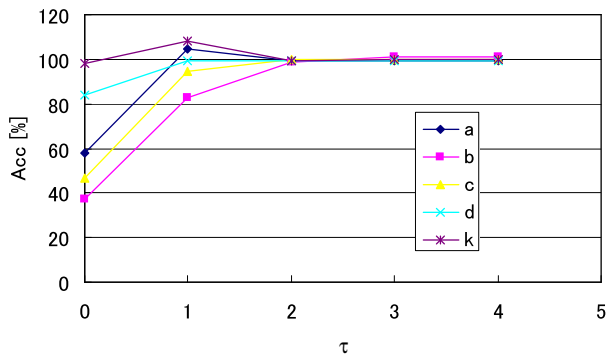


図4 自己相関係数の次数  $\tau$  による比の変化

Fig. 4 Ratio in consideration of  $\tau$ -th degree auto-correlation.

#### 4. シミュレーション

シミュレーションにより, [影響 1]~[影響 3]の各項目について検証する.

誤差分散の理論値  $\sigma_{th}^2$  の実験値  $\sigma_{ex}^2$  に対する比  $Acc$  を以下のように定義し, 理論値が妥当であるかどうかの基準とする.

$$Acc = \frac{\sigma_{th}^2}{\sigma_{ex}^2} \times 100 [\%] \quad (51)$$

##### 4.1 実験条件

実験の入力信号  $X(z)$  に相関係数  $\rho$  の AR(1) モデルを用いた.

$$X(z) = \frac{W_s(z)}{1 - \rho z^{-1}} \quad (52)$$

$W_s(z)$ : 白色信号

ここで, 相関係数  $\rho$  の AR(1) モデルの  $\tau$  次の自己相関は, 式 (52) より,

$$\Theta_{AR(1)}(\tau) = \rho^\tau \quad (53)$$

となる.

入力信号の範囲は  $-128 \sim 127$  とし, 乗算器係数のうち 1 つを  $2^{-19} \sim 2^{-1}$  まで変化させた時の誤差分散の比を得た.

##### 4.2 帯域信号の自己相関への依存性 ([影響 1]の検証)

ここで, 自己相関係数の次数  $\tau$  による比の変化を見ている. 相互相関値を無視し, 自己相関値の第  $\tau$  次までの理論値を用いて計算した.  $\rho = 0.95$ , 1次元 1 ステージ, 乗算器係数を 1 つだけ近似したとき, その比の平均値を図 4 に示す.

この図から読み取れることは, 2 つ.

(1) 自己相関係数の次数を多くとると, それだけ比が 100 [%] に近くなる.

(2) 相互相関値を考慮していないにもかかわらず, 比が 100 [%] に近い.

例えば, 乗算器係数  $b$  の場合, 次数を 0 次から増やすにつれて, 比が 37, 82, 98, 101, 101 [%] となり, 次数を多くとにしたがって比が 100 [%] に近くなる. つまり, 誤差分散が自己相関係数に大きく依存していることが分かる.

表 1 相互相関を考慮した時の比

Table 1 Ratio in consideration of cross-correlation.

	$a$	$b$	$c$	$d$	$k$
自己相関のみ考慮	99.5	100.8	99.9	99.3	100.2
相互相関も考慮	97.4	97.8	97.8	99.3	100.0
比の絶対変化	-2.1	-1.3	-2.1	0.0	0.1

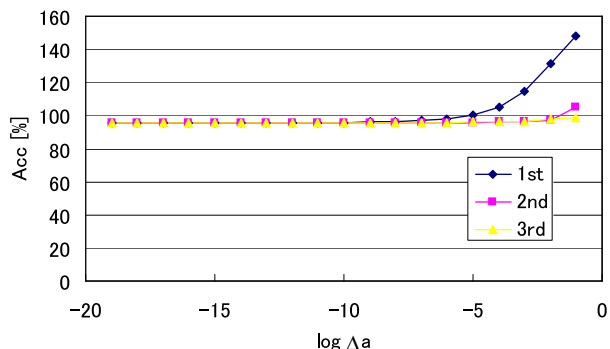


図5 微分階数による比の変化

Fig. 5 Ratio in consideration of differential orders.

##### 4.3 帯域信号の相互相関への依存性 ([影響 2]の検証)

相互相関値を考慮していないにもかかわらず比が 100 [%] に近い, つまり, 相互相関値は, 誤差分散にほとんど寄与しない. 確認のため, 自己相関値と相互相関値を共に考慮したときの比を各乗算器係数に対して調べる. 相関の次数は最大次数まで考慮した.  $\rho = 0.95$ , 1次元 1 ステージ, 乗算器係数を 1 つだけ近似したとき, その比の平均値を表 1 に示す.

自己相関値のみを考慮したときの比と自己相関値と相互相関値を共に考慮したときの比の 100 [%] に対する絶対変化は, たかだか 2 [%] 程度であり, 両者の違いはほとんど無い. つまり, 誤差分散が相互相関係数にあまり依存していないことが分かる.

これは, ウェーブレット変換が直交変換の一種であり, 変換後は相互相関値が小さくなる (直交する) ためであると思われる.

##### 4.4 高次項の影響 ([影響 3]の検証)

ここでは,  $n$  次項誤差の分散の理論値を求め, それらの比を比較する ( $n$  は 1~3).  $\rho = 0.95$ , 1次元 3 ステージ, 乗算器係数を 1 つだけ近似して, その比を求めた.

乗算器係数  $a$  のみを近似した場合を図 5 に示す.  $\log_2 \Delta a = -1$  のとき, 1 次項誤差の分散, 2 次項誤差の分散, 3 次項誤差の分散のそれぞれの比が 148, 105, 98 [%] となった. つまり, 高次項まで計算すると, それだけ比が 100 [%] に近くなる.

ここで, 比が  $100 \pm 20$  [%] であるときに 1 次項誤差分散の理論値が有効であるとする, 許される近似誤差は  $\log_2 \Delta a \leq -3$  である. つまり, 乗算器係数  $a$  に  $2^{-3}$  より大きな誤差を与えた場合, 1 次項誤差分散の理論値では, 比が 100 [%] から  $\pm 20$  [%] 以上悪化することになる.

他の乗算器係数についても同様の実験を行い, 許される近似誤差をまとめると表 2 のようになる.

表 2 誤差分散の比が  $100 \pm 20\%$  の範囲

Table 2 Range whose ratio of error distribution within  $100 \pm 20\%$ .

乗算器係数	$\log_2 \Delta h \leq$		
	$n$		
	1	2	3
$a$	-3	-1	-1
$b$	-7	-5	-1
$c$	-4	-2	-1
$d$	-1	-1	-1
$k$	-3	-1	-1

表 3 PSNR の比

Table 3 Ratio of PSNR.

	$a$	$b$	$c$	$d$	$k$
$\log_2 \Delta h \leq$	-3	-7	-4	-1	-3
比	99.9	100.7	100.0	100.0	100.0

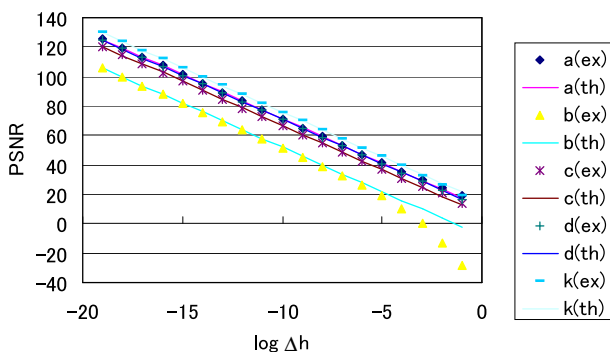


図 6 1次元3ステージの PSNR  
Fig. 6 PSNR on 1Dimension 3Stages.

[注意 4.1] 乗算器係数  $d$  のみを近似した場合、2 階以上の微分値は 0 となるので、2 階および 3 階の値は 1 階と同じになる。また、乗算器係数  $k$  のみを近似した場合、無限階の微分値も 0 でないので、3 階までの値を示した。

例えば、乗算器係数を 1 つだけ近似し、その近似誤差が  $2^{-4}$  であったとすると、乗算器係数  $b$  の 1 次項誤差の分散の理論値が実験値に比べて 20 [%] 以上差があることになる。つまり、高次項の影響は、乗算器係数によって大きい場合と小さい場合とがある。

#### 4.5 誤差分散と PSNR の関係

ここでは、誤差分散ではなく、PSNR として理論値を求め、実験値と比較する。 $\rho = 0.95$ 、1 次元 3 ステージ、乗算器係数 1 つのみを近似した場合のシミュレーション結果を図 6 に示す。

PSNR の計算式は以下の通り。

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{255^2}{\sigma_E^2} \text{ [dB]} \quad (54)$$

図 6 の理論値は、1 次項誤差の分散から求めた。例えば、乗算器係数  $b$  の場合、 $\log_2 \Delta b = -1$  のときの PSNR の理論値と実験値との差が 25 [dB] 以上ある。これは、2 次項誤差や 3 次項誤差を考慮しなかった影響である。

ここで、表 2 における  $n = 1$  のときの許される近似誤差範囲での理論値と、実験値との PSNR の比 (平均) を、表 3 に示す。それぞれの乗算器係数に対し、PSNR でみたときの比は、ほぼ 100 [%] となった。

## 5. ま と め

信号の加法性・白色性・エルゴード性を仮定し、乗算器係数を近似することによって発生する誤差および誤差分散を導出した。また、近似誤差への影響について検討し、誤差のメカニズムを解明した。

$\rho = 0.95$ 、1 次元 1 ステージ、乗算器係数  $b$  のみを近似した場合、自己相関係数の次数を 0 次から増やすにつれて、比が 37, 82, 98, 101, 101 [%] となり、次数を多くとるにしたがって比が 100 [%] に近くなった。このことから、誤差分散が自己相関係数に大きく依存していることが分かった。

また、 $\rho = 0.95$ 、1 次元 1 ステージ、乗算器係数を 1 つだけ近似した場合、自己相関値のみを考慮したときの比と、自己相関値と相互相関値を共に考慮したときの比の 100 [%] に対する絶対変化は、たかだか 2 [%] 程度であり、両者の違いはほとんど無かった。このことから、誤差分散が相互相関係数にあまり依存していないことが分かった。

更に、 $\rho = 0.95$ 、1 次元 3 ステージ、乗算器係数を 1 つだけ近似した場合、1 次項誤差の分散、2 次項誤差の分散、3 次項誤差の分散のそれぞれの比が 148, 105, 98 [%] となり、高次項まで含めて計算すると、それだけ比が 100 [%] に近くなった。同時に、乗算器係数  $a$  に  $2^{-3}$  より大きな誤差を与えた場合、1 次項誤差の分散の理論値では、比が 100 [%] から  $\pm 20$  [%] 以上悪くなった。同様の実験を各乗算器係数に対して行い、誤差分散に対する高次項の影響を調べ、表 2 のようにまとめた。このことから、高次項の影響が大きい場合と小さい場合があることを示した。

以上の解析に加えて、文献 [3] の方法を用いることにより、短語長化を行うことが可能となる。

## 文 献

- [1] D.S.Taubman, M.W.Marcellin, "JPEG 2000 – Image compression fundamentals, standards and practice," Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [2] M.D.Adams, F.Kossentini, "Reversible Integer-to-Integer Wavelet Transform for image Compression: Performance Evaluation and Analysis," IEEE Transactions on Image Processing, vol.9, pp1010–1024, no.6, June 2000.
- [3] 西田 治, 岩橋 政宏, "Lossless DCT における乗算係数の語長配分法", 電子情報通信学会研究技術報告, DSP2001 (145) [1–8], (2002.1).