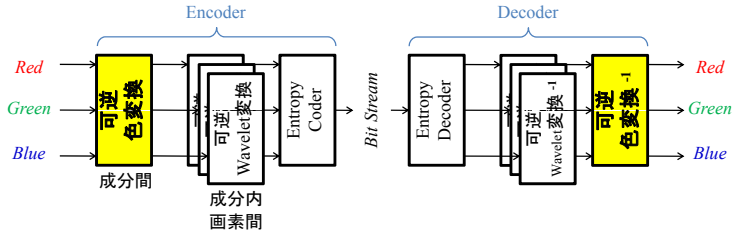


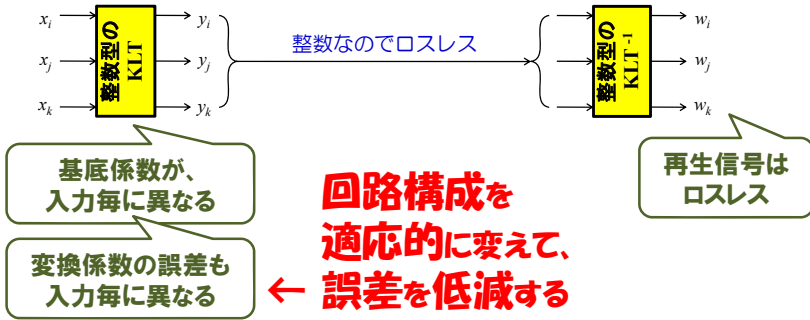
順序置換と符号置換による可逆KLTの係数特異点の回避

岩橋政宏(長岡技科大)
貴家仁志(首都大東京)

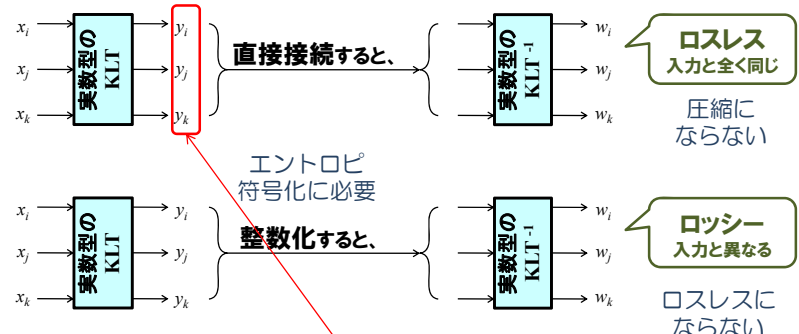
1. 可逆符号化を構成したい (色彩画像のロスレス圧縮)



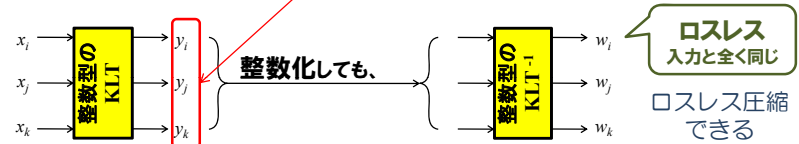
2. 色変換として、KLTを使うとする (色成分間の相関を活用したい)



3. 実数型の KLT



4. 整数型の KLT (lifting)



差分として誤差を定義 → 低減する

2. 可逆KLTの特異点問題

カルーネン・レーベ変換 (KLT)

色間の相関がゼロ ↓ ↓ 色信号 (R,G,B)

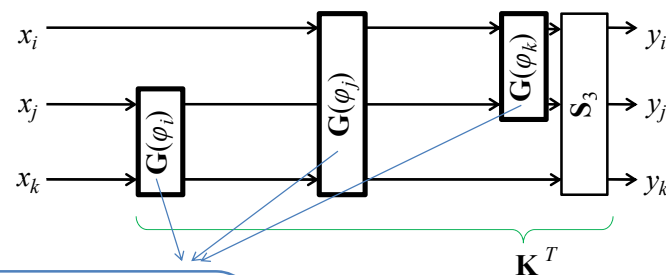
$$Y = K^T X$$

↑ 正規直交基底 (入力毎に異なる)

基底を入力毎に最適化して、付加情報として送るとして、

→ 誤差最小の回路構成を、入力毎に決める
場合について考察する...

KLTを2点の回転変換で構成する



2点の回転変換

$$G(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

このままでは
ロスレスは不可能

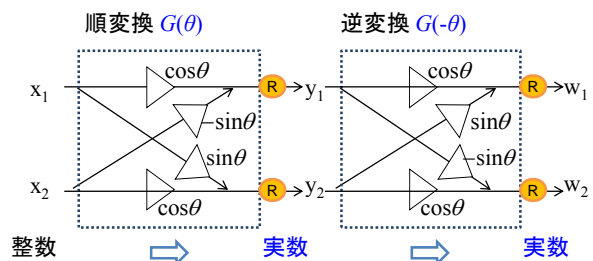
$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan(K_{2,3}/K_{3,3}) \\ \arcsin(K_{1,3}) \\ \arctan(K_{1,2}/K_{1,1}) \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} (-1)^a & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^b & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^c \end{bmatrix}$$

回転角度
が入力毎に異なる

$a, b, c \in \{0, 1\}$
符号は適宜

実数型の2点の回転変換

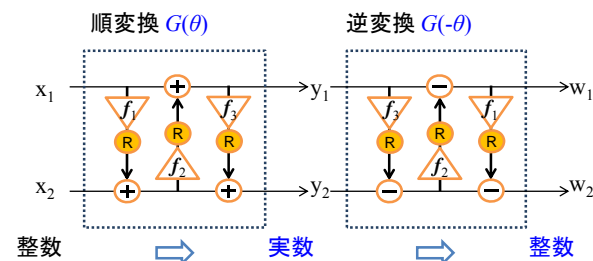


整数化すると
変換係数に
誤差が発生

整数化すると
再生信号に
誤差が発生

再生信号が、ロスレスとならない $[w_1 \ w_2] \neq [x_1 \ x_2]$

整数型の2点の回転変換



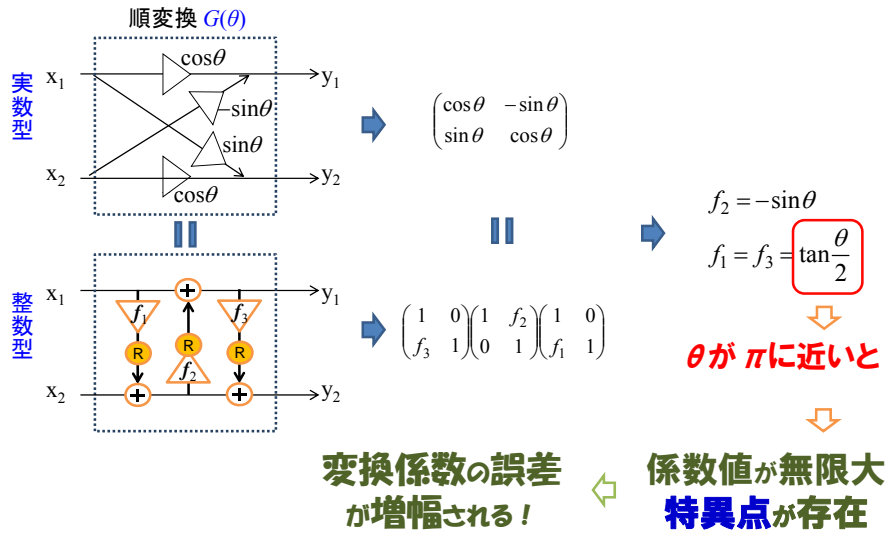
整数化すると
変換係数に
誤差が発生

誤差がキャンセル
再生信号は
誤差なし!

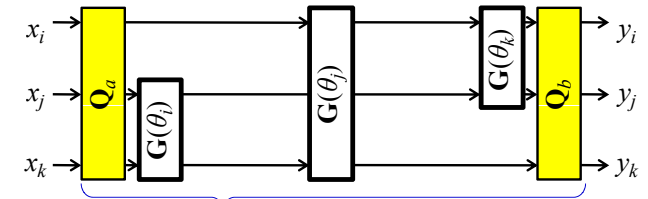
低減したい ←

再生信号は、ロスレスとなる! $[w_1 \ w_2] = [x_1 \ x_2]$

係数値の特異点 (新しい問題)



特異点の回避 (従来構成)



全体が K^T となる条件下で、

$Q_a = P_3 S_3$
 $Q_b = S_3 P_3$ を色々変えている

指数関数的な全探索が必要
 リアルタイムで回路構成できない

$S_3 = \begin{bmatrix} (-1)^a & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^b & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^c \end{bmatrix}, a, b, c \in \{0,1\}$

$Q_b = Q_a^{-1}$ とは限らないが、
 $\det Q_b = \det Q_a^{-1}$ は満たす。

$P_3 \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

最適化に要する時間 (従来構成)

$Q_a = P_3 S_3, Q_b = S_3 P_3$

$3! = 6$ 通り (3点の順序置換)
 $2^3 = 8$ 通り (3点の符号置換)

全探索が必要
 探索回数は指数関数

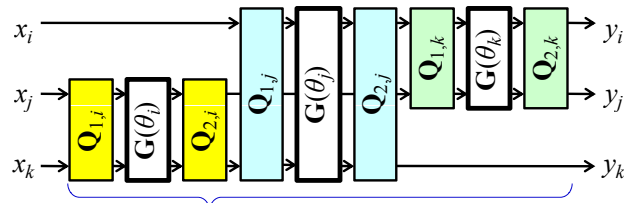
- 全体で $(3! 2^3)^2$ 通り
- 但し、半分は行列式条件を満たさない
- 回転角度が相互に依存するので、

リアルタイムで回路構成できない

$\theta_i = \arcsin(\sin\varphi_i \cos\varphi_j), \theta_j = \arctan\left(\frac{\tan\varphi_j}{\cos\varphi_i}\right), \theta_k = -\arctan\left(\frac{\tan\varphi_i \sin\varphi_j + \tan\varphi_k}{\tan\varphi_i \sin\varphi_j \tan\varphi_k - 1}\right)$

3. 提案法

特異点の回避 (提案構成)



全体が K^T となる条件下で、
 $Q_{1,p} = P_2 S_2$
 $Q_{2,p} = S_2 P_2$ } を色々と変える

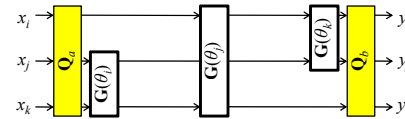
多項式的な
探索時間で
済ませたい

リアルタイムで
適応させたい

$$S_2 = \begin{bmatrix} (-1)^a & 0 \\ 0 & (-1)^b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \{0,1\} \quad \text{2点の符号置換}$$

$$P_2 \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{2点の順序置換}$$

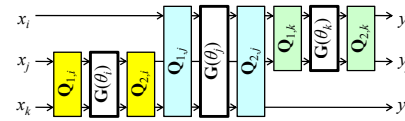
従来構成・3点の置換



順序置換 = $3!$ と
符号置換 = 2^3 が
2つあるので、

全体で $(3! 2^3)^2 = 2,304$

提案構成・2点の置換

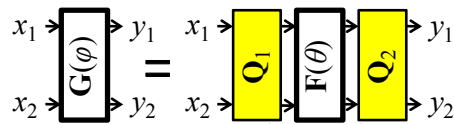


順序置換 = $2!$ と
符号置換 = 2^2 が
6つあるので、

全体で $(2! 2^2)^6 = 262,144$

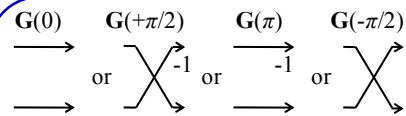
↓
 回転角度に対する、置換の作用を解析して、
 探査すべき組み合わせ数を、大幅に低減させる

符号置換と順序置換の候補



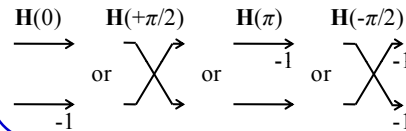
・入力毎に ϕ が異なる。
 ・特異点を避けるよう、
 Q_1, Q_2 を適宜変える。

Givensの
回転

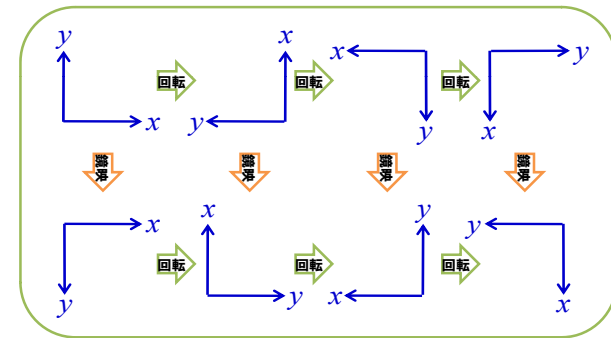


どれも誤差を
・発生しない
・増幅しない

Householderの
鏡映

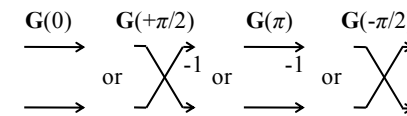


全部で8通り



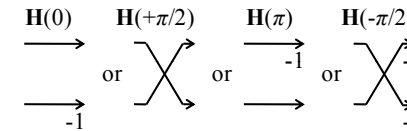
位数8の
二面体群

Givensの
回転

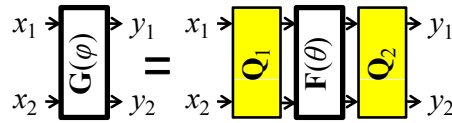


8通りで
全てを
網羅する

Householderの
鏡映



回転角に対する置換の作用



・入力毎に φ が異なる。
 ・特異点を避けるよう、
 Q_1, Q_2 を適宜変える。

Givensの回転から選ぶ、 $F(\theta)$ を $G(\theta)$ で構成するとして、

case(1) $G(\varphi) = G(0)G(\theta)G(0)$	$G(\beta)G(\alpha) = G(\beta + \alpha)$	case(1) $\theta = \varphi$
case(2) $G(\varphi) = G(0)G(\theta)G(+\pi/2)$	$H(\beta)G(\alpha) = H(\beta - \alpha)$	case(2) $\theta = \varphi - \pi/2$
case(3) $G(\varphi) = G(0)G(\theta)G(\pi)$	$G(\beta)H(\alpha) = H(\beta + \alpha)$	case(3) $\theta = \varphi - \pi$
case(4) $G(\varphi) = G(0)G(\theta)G(-\pi/2)$	$H(\beta)H(\alpha) = G(\beta - \alpha)$	case(4) $\theta = \varphi + \pi/2$

回路構成の4候補

与えられた φ に対し、
 誤差最小のcaseを選ぶ



GとHの性質
 を使うと



θ が特異点から
 遠くなるように
 選ばばよい

Givensの回転から候補を選ぶと...

case(1) $G(\varphi) = G(0)G(\theta)G(0)$	➔	case(1) $\theta = \varphi$
case(2) $G(\varphi) = G(0)G(\theta)G(+\pi/2)$		case(2) $\theta = \varphi - \pi/2$
case(3) $G(\varphi) = G(0)G(\theta)G(\pi)$		case(3) $\theta = \varphi - \pi$
case(4) $G(\varphi) = G(0)G(\theta)G(-\pi/2)$		case(4) $\theta = \varphi + \pi/2$

特異点との距離で選べる
 (4通り×3つの回転変換)

Householderの鏡映を使うと...

case(1) $G(\varphi) = H(0)G(\theta)H(0)$	➔	case(1) $\theta = \varphi$
case(2) $G(\varphi) = H(0)G(\theta)H(+\pi/2)$		case(2) $\theta = \varphi - \pi/2$
case(3) $G(\varphi) = H(0)G(\theta)H(\pi)$		case(3) $\theta = \varphi - \pi$
case(4) $G(\varphi) = H(0)G(\theta)H(-\pi/2)$		case(4) $\theta = \varphi + \pi/2$

回転角度の符号を反転できる
 (今回は使わない)

いづれにしても、2点の置換は...

3つの回転角を、独立に決定できる

最適化に要する時間

指数関数的な
 探索回数×
 2次統計量

リアルタイムで
 回路構成できない

従来法

$$(3! \cdot 2^3)^2 = 2,304 \text{ 通り、}$$

誤差の分散を計算

多項式的な
 探索回数×
 1次の統計量

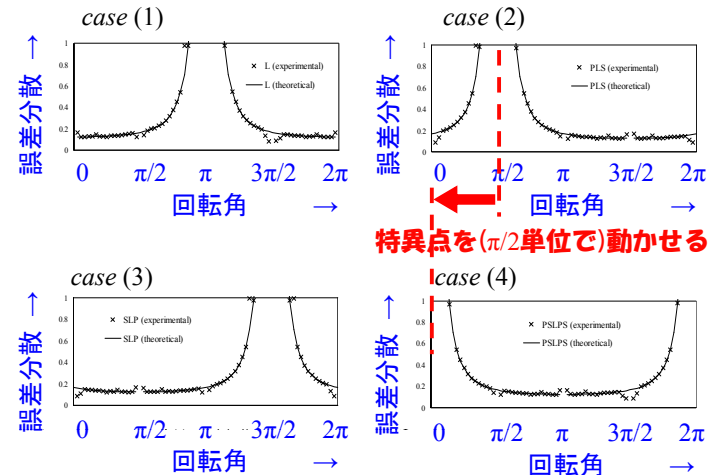
リアルタイムで
 回路構成できる

提案法

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ 通り、}$$

特異点との距離を計算

4つの候補(回路構成)の特異点

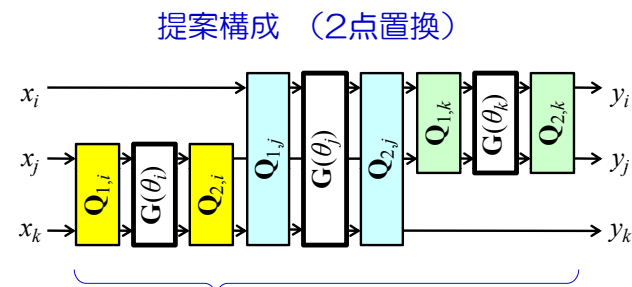


4. 実験結果

4.1. 信号の整数化による誤差

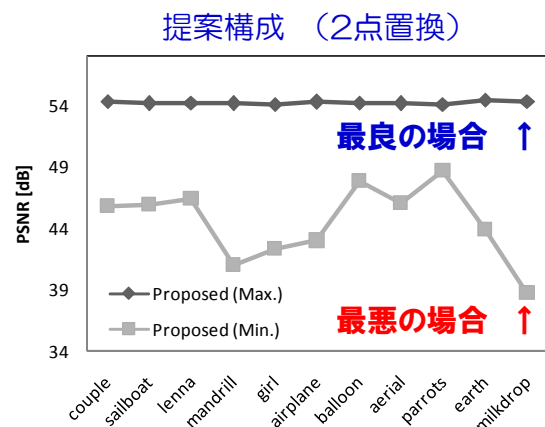
4.2. 係数の有限語長化による誤差

実験方法（提案構成・2点置換）



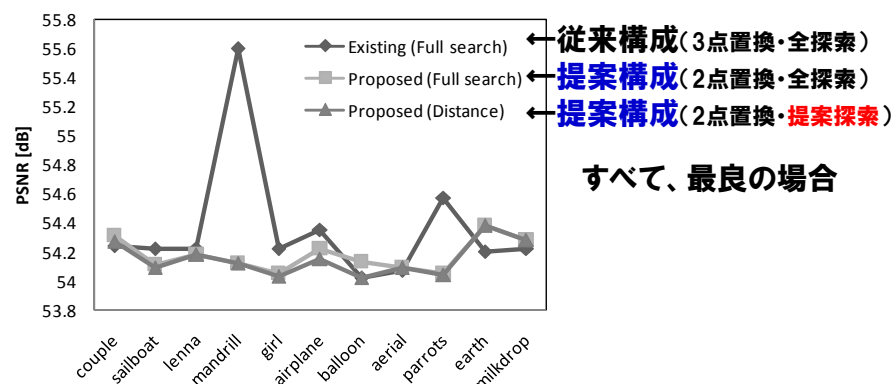
全体が K^T となる条件下で、
 $Q_{1,p}, Q_{2,p}$ （置換）を色々変えて、
 丸め誤差の分散を、PSNRで測定した

4.1. 信号の整数化による誤差



- 置換を適切に導入することで、54 [dB] を達成できる。
- 置換を導入しないと、最悪で、39 [dB] になってしまう。

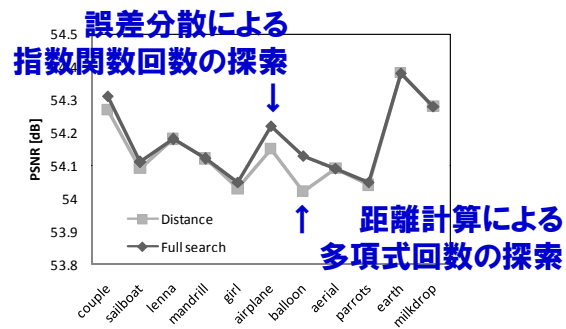
従来法との比較



- 従来構成も、提案構成も、おおむね 54 [dB] を達成できる
- 提案構成 & 提案探索は、54dBを保持しつつ、高速に適応できる

省略可

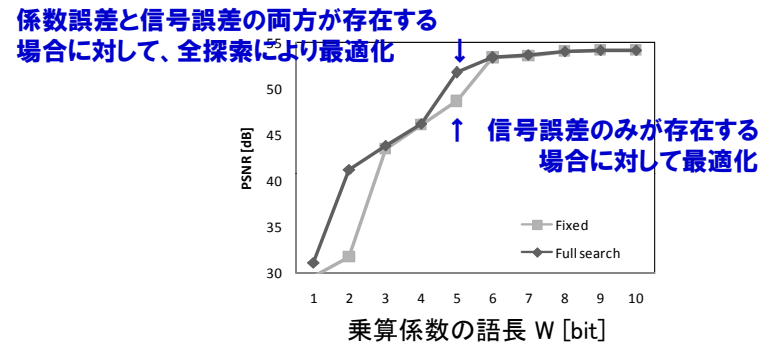
拡大して精査すると、



•特異点との距離に基づき、回転変換毎に独立に探索することで、
ほぼ最適な解が得られることが確認された

省略可

4.2. 係数の有限語長化による誤差



- $W=6$ [bit] 未満では ρ が無視できず、両者に違いがある。
- それ以上では、 ρ には無関係であり、
距離計算に基づく多項式回数の探索が有効

省略可

誤差の理論計算

省略可

最適化に要する時間 (N点のKLT)

従来構成&全探索

N点の順序置換 = $N!$ 種と
N点の符号置換 = 2^N 種の

全ての組合せ = $N! 2^N$ 種が、
2種あるので、

全体で、 $(N! 2^N)^2$

指数関数的な回数

提案構成 & 提案探索

2点の順序置換 = 2種と、
2点の符号置換 = 4種の

独立な組合せ = 4種が、
 $(N/2) \log_2 N$ 種あるので、

全体で、 $(4N/2) \log_2 N$

多項式的な回数

省略可

3.3. 信号の整数化による誤差分散

$$\begin{bmatrix} e_{y1} \\ e_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 1 & 0 \\ \cos\theta & \tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{y1}^2 \\ \sigma_{y2}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 + \sin^2\theta \\ 1 + \cos^2\theta + \tan^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{sgl}^2(\theta) = \sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2 = \frac{1}{12} \left(3 + \tan^2\frac{\theta}{2} \right)$$

回転角の偶関数

回転角 π [rad] に特異点を持ち、特異点と回転角との距離に対する、単調減少関数となる

→ Givens回転とHouseholder鏡映、**どちらでもよい**

省略可

3.4. 係数の有限語長化による誤差

$$\sigma_{eff}^2(\theta) = \begin{bmatrix} (Af_1)^2 & (Af_2)^2 & (Af_3)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^4\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin^2\frac{\theta}{2} & \cos^2\frac{\theta}{2} & \sin\theta \\ \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[x_1x_1] \\ E[x_2x_2] \\ E[x_1x_2] \end{bmatrix}$$

$$(Af_1)^2 = (Af_2)^2 = (Af_3)^2 = \frac{1}{12} \cdot 2^{-2W}, \quad E[x_1x_1] = E[x_2x_2] = 1, \quad E[x_1x_2] = \rho$$

$$\sigma_{eff}^2(\theta) = \frac{1}{12} \cdot 2^{-2W} \left(2 + \cos^4\frac{\theta}{2} \right)$$

$$- \frac{1}{12} \cdot 2^{-2W} \left(\sin 2\theta - \sin\theta \cdot \cos^4\frac{\theta}{2} \right) \rho$$

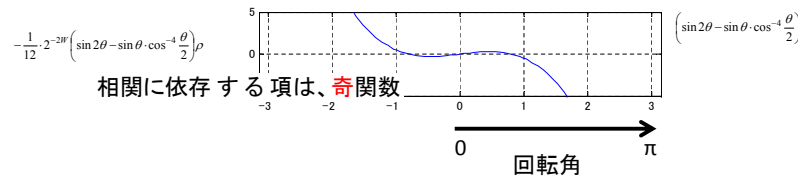
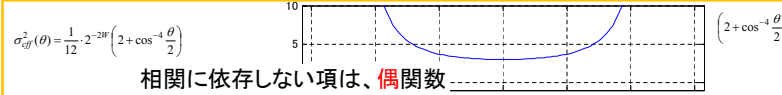
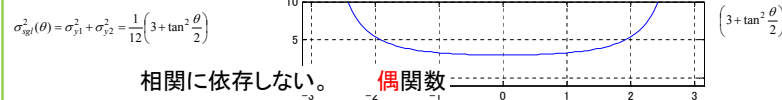
回転角の奇関数

色成分が相互に相関がある $\rho \neq 0$ の場合、係数誤差は、 θ か $-\theta$ かの影響を受ける (信号誤差は影響を受けない)

→ Givens回転とHouseholder鏡映、**違いがある**

省略可

信号の整数化による誤差



係数の有限語長化による誤差

5. まとめ

KLT変換の構成要素である2点の回転変換に対し、

- 順序置換および符号置換を作用させた
- 回転角に対する並進および反転作用を解析した

組み合わせ探索の回数が、

- 指数関数回数の、誤差分散の計算から、
- 多項式回数の、回転角の距離計算へ、簡略化された

個々のカラー信号の性質に適応した、

- 高効率な可逆圧縮の、高速実現が可能となる。