

# 整数型 3 次元回転変換における回路構成の組み合わせと その丸め誤差の低減

## Combination of Circuit Structure and Reduction of Rounding Error for Integer Three Dimensional Transform

小國 健太

岩橋 政宏

Kenta Oguni

Masahiro Iwahashi

長岡技術科学大学電気系

Nagaoka University of technology Department of Electrical Engineering

**Abstract:** In this report, we reduce signal's delay due to lifting steps of the three dimensional integer rotation transform by introducing a multi input - single output lifting. We also reduce total amount of rounding errors by selecting the best structure of all the combinations of order of input signals. As a result, it is confirmed that the proposed method reduces delay from 9 to 4 and the rounding error by 30%.

### 1 はじめに

整数値出力を得る直交変換において、リフティング演算は乗算器と整数値に丸める処理によって構成され、係数の有限語長化や信号の丸め処理による誤差が順変換と逆変換との間で打ち消されるようになってい [1].しかし、次のステップの演算に移行するためには、前のステップの演算を待つ必要があるためステップ数に比例して回路遅延が増大する。また、丸め処理によって順変換出力の丸め誤差が発生する。本報告では整数型の 3 次元回転変換において、乗算器係数が無限大となり、丸め誤差に悪影響を与える点が存在することに着目し、このような特異点を避けるために 3 つの入出力信号を並べ替えることで回路の構成を行う。更に、1 入力-1 出力のリフティング 9 つで構成する場合に対し、2 入力-1 出力のリフティング 4 つで構成することで、信号の遅延および丸め誤差を低減できることを示す。

### 2 従来の構成方法

3 次元回転変換(以下 3D-RT)は 3 つの 2 次元回転変換(2D-RT)を用いて構成される[2]. Fig.1 にリフティング構成による 3 次元回転変換を示す. Fig.1 において (R) は丸め処理を示す.このとき、各 IRT を式で表すと、

$$\mathbf{R}(\theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_{i3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_{i2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_{i1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}, i \in \{1,2,3\} \quad (1)$$

となる.このとき乗算器係数  $f_{ij}$  は、

$$[f_{i1} \ f_{i2} \ f_{i3}] = [(1 - \cos \theta_i) / \sin \theta_i \quad -\sin \theta_i \quad f_{i1}]$$

となり、1 つの回転角によって与えられる。従来のリフティング構成を用いた 3 次元回転変換では 3 つの 2 次元回転変換を 3 ステップのリフティングを持つ整数回転変換(以下 IRT)に置き換え、9 ステップのリフティングによって構成される

### 3 回路遅延を減らした構成方法

2 入力-1 出力のリフティングを 4 つ用いた Fig.2 のような 3D-RT の構成をここで提案する。その変換行列を式で表すと式(2)のようになる。

$$\mathbf{H} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{H}_3 \cdot \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1 = \mathbf{G} \cdot \mathbf{F} \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} (\mathbf{F})_{11} & (\mathbf{F})_{12} & (\mathbf{F})_{13} \\ (\mathbf{F})_{21} & (\mathbf{F})_{22} & (\mathbf{F})_{23} \\ g_{13}(\mathbf{F})_{11} + g_{23}(\mathbf{F})_{21} + h_{13} & g_{13}(\mathbf{F})_{12} + g_{23}(\mathbf{F})_{22} + h_{23} & g_{13}(\mathbf{F})_{13} + g_{23}(\mathbf{F})_{23} + 1 \end{pmatrix}$$

ここで、式(2)において  $\mathbf{F}$  は、

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 + h_{21}h_{12} + (h_{21}h_{32} + h_{31})h_{13} & h_{21} + (h_{21}h_{32} + h_{31})h_{23} & h_{21}h_{32} + h_{31} \\ h_{12} + h_{32}h_{13} & 1 + h_{32}h_{23} & h_{32} \\ h_{13} & h_{23} & 1 \end{pmatrix}$$

式(2)の  $(\mathbf{F})_{ij}$  は  $\mathbf{F}$  の  $i$  行  $j$  列目の成分を表すものとする。ここで、式(2)の乗算器の係数  $h_{ij}$ 、 $g_{ij}$  は変換行列  $\mathbf{F}$  と式(3)式に示す 3D-RT の変換行列  $\mathbf{S}$  が等しくなるように決定する。

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} c_2c_1 & -s_2s_1 & -s_2 \\ c_3s_1 - s_3s_2c_1 & c_3c_1 - s_3s_2s_1 & -s_3c_2 \\ s_3s_1 - c_3s_2c_1 & s_3c_1 - c_3s_2s_1 & c_3c_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$c_i = \cos \theta_i, \quad s_i = \sin \theta_i, \quad i \in \{1,2,3\}$$

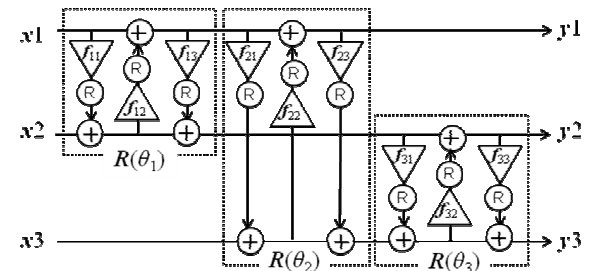


Fig. 1: 3D-RT (existing method)

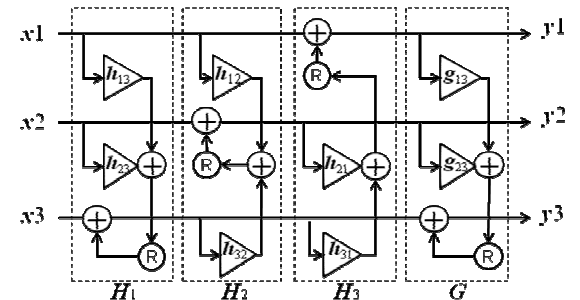


Fig. 2: 3D-RT (proposed method)

このとき、乗算器の係数は以下の式を満たしている必要がある。

$$\begin{bmatrix} h_{32} \\ h_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_3c_2 \\ (s_3s_2s_1 + c_3c_1 - 1)/h_{32} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} h_{21} \\ h_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + h_{32}h_{23} & h_{23} \\ h_{32} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -s_2s_1 \\ -s_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{21} & h_{32}h_{21} + h_{31} \\ 1 & h_{32} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_2c_1 - 1 \\ c_3s_1 - s_3s_2c_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} g_{13} \\ g_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F)_{11} & (F)_{21} \\ (F)_{12} & (F)_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s_3s_1 - c_3s_2c_1 - h_{13} \\ s_3c_1 - c_3s_2s_1 - h_{23} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$g_{13}(F)_{13} + g_{23}(F)_{23} = c_3c_2 - 1 \quad (8)$$

以上のように乗算器の係数を決定して、リフティングステップを従来の9から4に減らした3D-RTの構成ができ、回路の遅延が低減される。式(4)~(8)より係数値 $h_{ij}$ ,  $g_{ij}$ は、3つの回転角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ によって決まる。しかし、式(4)において $h_{32}=0$ のとき、 $h_{23}$ が $\infty$ となり丸め誤差も $\infty$ となってしまう。そのため係数がこのような特異値にならないよう回路構成をする必要がある。

#### 4 回路構成の組み合わせ決定方法

3D-RTでは与えられた3点の直交変換から回転角を決定する。3点の直交変換 $P$ と入出力信号の関係を

$$[y_1 \ y_2 \ y_3]^T = P \cdot [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \quad (9)$$

としたとき、 $P$ と(3)式の $S$ が等しくなるような回転角を求める。このとき3D-RTの回転角は次のようになる。

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{-(P)_{12}}{(P)_{11}} \right\}, \theta_2 = \sin^{-1} \left\{ -\frac{(P)_{13}}{(P)_{33}} \right\}, \theta_3 = \tan^{-1} \left\{ \frac{-(P)_{23}}{(P)_{33}} \right\} \quad (10)$$

ここで、3つの入出力信号 $x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3$ の順序の並び替えを行う。その一例として $x_1-y_1$ と $x_2-y_2$ を並び替えた場合を考える。このとき $P$ の入出力を並び替えた行列と入出力の関係は、

$$P_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

と表わされる。式(11)の $P_s$ と式(3)の $S$ が等しくなるようにすると3D-RTの回転角は式(12)のようになる。

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{-(P)_{21}}{(P)_{22}} \right\}, \theta_2 = \sin^{-1} \left\{ -\frac{(P)_{23}}{(P)_{33}} \right\}, \theta_3 = \tan^{-1} \left\{ \frac{-(P)_{13}}{(P)_{33}} \right\} \quad (12)$$

このように回路の入出力を並び替えることで回転角が変化することがわかる。回転角が異なることで乗算器の係数値が変化し、順変換出力の丸め誤差が変化する。また、係数が $\infty$ となる特異値の回避が可能になる。ここでは入出力の並び替えとして3!=6通りの組み合わせが考えられ、その中から丸め誤差が最も小さくなる構成を決めることができる。

#### 5 実験結果

ここでは提案した3D-RTをカラー画像の色変換に応用し、その順変換出力の丸め誤差を測定する。3D-RTの入力信号 $x_1, x_2, x_3$ にはカラー標準画像のRGB成分を用いる。このとき回転角はPCAによって求められた変換

行列から決定する[3]。例として画像Lennaにおける入出力の組み合わせに対する回転角をTable1に示す。Table1においてR,G,Bは画像の色成分を表すものとする。また、丸め誤差は式(13)で示すように、丸め処理をしない場合の出力 $y_i$ と丸め処理を加えた場合の出力 $\hat{y}_i$ の差分とする。

$$[e_1 \ e_2 \ e_3]^T = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T - [\hat{y}_1 \ \hat{y}_2 \ \hat{y}_3]^T \quad (13)$$

各入力に対する丸め誤差をFig.3に示す。9ステップのリフティングでの構成を従来法とし、4ステップのリフティングでの構成を提案法とする。Fig.3に示したものはそれぞれの手法における丸め誤差の分散で、6通りのうち最小となる組み合わせにおける値である。結果として4ステップのリフティングによる構成において、Lennaの場合、入出力の組み合わせB-y<sub>b</sub>,R-y<sub>r</sub>,G-y<sub>g</sub>としたとき丸め誤差が従来の構成法より約30%低減されることがわかった。

#### 6 まとめ

本報告では整数値出力を得る3次元回転変換の丸め誤差を小さくするための構成法を提案した。また、3次元回転変換を実際に色変換に応用し、丸め誤差を測定した結果、4ステップのリフティングによる構成において、従来の9ステップのリフティングで構成する場合より信号の遅延が約40%、および丸め誤差を約30%低減できることがわかった。

Table1 rotation angle for 3D-RT(ex. Lenna)

	R-B-G	B-R-G	R-G-B	G-R-B	B-G-R	G-B-R
$\theta_1$	-32.91	-131.36	-48.59	156.69	-153.76	-135.27
$\theta_2$	-43.59	15.90	-23.17	-46.21	-41.63	-19.30
$\theta_3$	157.78	-134.20	-133.73	-28.52	-148.24	-49.89

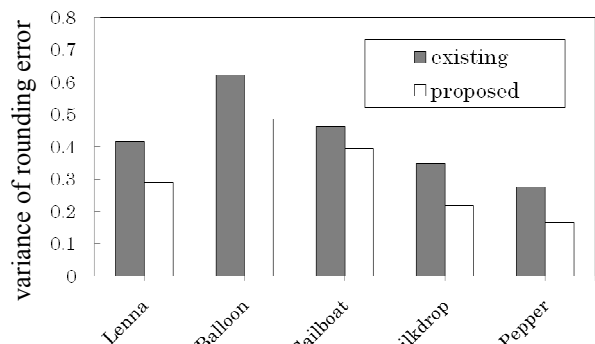


Fig.3 Rounding Error of 3D-RT

#### 参考文献

- [1] S. Chokchaitam, M. Iwahashi, S. Jitapunkul, "A New Unified Lossless/Lossy Image Compression based on A New Integer DCT", IEICE Trans. on Fundamentals, E88-D, no.7, pp.1598-1606, July 2005.
- [2] P. Hao, Q. Shi, "Matrix Factorization for Reversible Integer Mapping," IEEE Trans. on Signal Processing, vol.49, no.10, pp.2314-2324, Oct.2004.
- [3] 境田慎一, "主成分分析法による3色信号間の相関性を利用した画像のデータ圧縮", テレビジョン学会誌, vol.47, no.2, p.264