

ウェーブレット変換の DC ロスレス条件に関する理論解析

岩橋 政宏[†]

貴家 仁志[‡]

[†] 長岡技術科学大学 工学部 電気系

〒940-2188 新潟県 長岡市 上富岡町 1603-1

[‡] 首都大学東京 システムデザイン学部

〒191-0065 東京都 日野市 旭が丘 6-6

あらまし 新しいクラスのウェーブレットとして、著者らは既に DC ロスレス・ウェーブレットを提案している。これは、入力信号が定数信号 (DC 信号) である場合に信号の可逆再生が保証される特性を持つ。このため、定数信号であるホワイトバランスを用いて映像システムの撮像 / 表示機器を調整する際に有効となる。先の報告では、回路実現において必要となる最小の語長を、信号と乗算係数それぞれについて実験的に導出した。本報告では、短語長化に用いる丸め演算の特性を数式表現し、DC 信号に対するウェーブレットの等価回路を導出する。これにより、ウェーブレットが DC ロスレスとなるための、語長に対する条件式を解析的に明らかにする。従来の L_2 ノルムや L_1 ノルムによる評価に比べ、最小語長を個々の入力値に対して過不足なく求めることができる。

キーワード リフティングウェーブレット, ロスレス符号化, ホワイトバランス, ラウンディング誤差

Analysis on DC Lossless Condition of Wavelet Transform

Masahiro IWAHASHI[†]

and Hitoshi KIYA[‡]

[†] Nagaoka University of Technology Nagaoka-shi, Niigata, 940-2188 Japan

[‡] Tokyo Metropolitan University Hino-shi, Tokyo, 191-0065 Japan

Abstract Recently, we have proposed the DC lossless wavelet which guarantees lossless reconstruction of input signals with a constant value (white balance, DC). In our previous report, the minimum word lengths of signals and coefficients are experimentally determined. In this report, introducing the DC equivalent circuit, we theoretically derive conditions on the word length for the DC lossless wavelet. The minimum word lengths are precisely determined according to our analysis.

Keyword Lifting Wavelet, Lossless Coding, White balance, Rounding Error

1. はじめに

JPEG や MPEG などの国際標準に準拠した圧縮符号化方式は、デジタル画像の伝送蓄積技術のグローバルな発展にとって欠かせない[1,2]。これらの方式は離散コサイン変換 (DCT) を採用しており、DVD や MP3 に代表されるように、現代社会に広く普及している。

近年、デジタルシネマの標準方式として JPEG-2000 が採用された[3]。これは DCT に代わりウェーブレットを採用しており[4,5,6]、高精細画像を扱うことから、変換回路の省電力小型化を目指した演算処理の簡素化が研究されている[7]。

デジタル演算回路では、乗算係数や信号の値は有限の語長で二進数表現されており、語長低減が演算処理の簡素化に有効である。このため、これまでに多くの語長低減法が研究されてきた[8-11]。しかし、その代償として一般に再生信号に誤差が重畳する。

例えば JPEG-2000 における 5/3 ウェーブレットでは、リフティング構成により誤差が順変換と逆変換の間でキャンセルされるため、信号の可逆再生が保証され

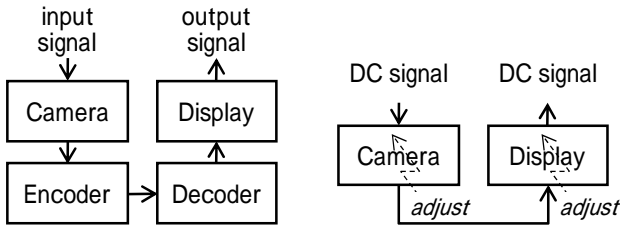
る[5,6]。このため、可逆符号化として利用される[4]。

一方、9/7 ウェーブレットでは、より高効率な圧縮が可能であるものの、スケーリングの存在により一般には信号の可逆再生が保証されない[8]。このため、量子化を併用して非可逆符号化として用いられる[4]。しかし、ホワイトバランスのような定数信号 (以下、DC 信号) により撮像装置や表示装置を調整する場合[13]、符号化装置の影響を無視できるよう、DC 入力信号が可逆的に再生される必要がある。

著者らは先に、9/7 ウェーブレットとの互換性を保ちつつも、DC 入力に対して可逆再生を保證できる、DC ロスレス・ウェーブレットを提案した[12]。また、このとき必要となる最小の語長を実験的に求めた。誤差分散に基づく L_2 ノルム解析により最小語長を導出すると[9]、近似的な値は得られるが可逆再生は保証されない。誤差の最悪値として L_1 ノルム解析を行うと[10]、可逆再生は保証されるが過剰な値が得られる。これらの統計的手法では、必要最小語長を特定の入力値に対して個別に求めることはできない。

本報告では、DC 信号が入力された場合のウェーブレットの等価回路を導き、非統計的な手法により丸め誤差を解析することで、DC 信号の可逆再生（以下、DC ロスレス）のための、乗算係数の語長に対する条件（以下、係数語長条件）および信号の語長に対する条件（以下、信号語長条件）を理論的に導出する。これにより、DC ロスレスに必要な最小の語長が、個々の入力値に対して過不足なく求められる。

以下、2.では議論の準備として DC ロスレスおよび乗算係数や信号の語長を定義し、有限語長化に用いる丸め演算の性質をまとめる。3.では、乗算が写像不変となるための係数語長条件を導く。4.では、ウェーブレットの DC 等価回路を導出することで、信号語長条件を明らかにする。5.では、これらの条件から DC ロスレスに必要な最小語長を求め、 L_2 ノルムや L ノルムによる解析結果と比較する。



(a) 映像伝送/蓄積システム (b) 撮像/表示系の調整

図 1 ホワイトバランスによるシステムの調整

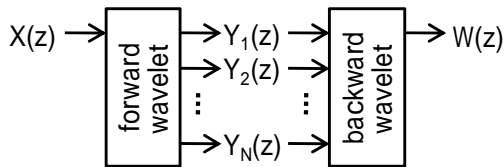


図 2 ウェーブレットによる帯域分割

2. 準備

2.1. DC ロスレスの定義

図 1(a)には、撮像装置の出力映像が符号化され、伝送あるいは蓄積され、復号された映像が表示装置に入力されるシステムを示す。撮像装置や表示装置は、DC 信号であるホワイトバランスを用いて調整される[13]。符号化(encoder)と復号(decoder)が DC 信号に対して可逆であれば、図 1(b)に示すように、符号化・復号の影響を勘案せずに撮像/表示系を調整できる。

図 2 に示すように、ウェーブレットに基づく符号化では、入力信号 $X(z)$ は複数の帯域信号 $Y_i(z)$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ に帯域分割された後、量子化されエントロピ符号化される。最低域の帯域信号 $Y_1(z)$ には DC 信号が含まれる。復号時には帯域が合成されることで、再生信号 $W(z)$ が出力される。ウェーブレットが DC に対して可

逆となるとは、 $X(z)$ が DC 信号であるときに、 $W(z)=X(z)$ となることである。更に、 $i = 1$ に対して $Y_i(z)=0$ となる場合を、本報告では DC ロスレスと定義する。9/7 や 5/3 のような 2 チャンネル・ウェーブレットは、信号を 2 つの帯域に分割する。これをカスケードに接続することで、信号はより多くの帯域に分割される[4]。本報告では、2 帯域分割の場合に焦点を絞り議論を進める。

2.2. デジタル値の語長

固定小数点により 2 進数表現されたある値 q は、

$$q = \sum_{p=-F}^{I-1} b_p 2^p, \quad b_p \in \{0,1\} \quad (1)$$

$$I \geq 1, \quad F \geq 0$$

と記述される。このとき、符号部と整数部の語長は合わせて I [bit]、小数部の語長は F [bit] である。また、 q の最大値は $2^{I-1} \cdot 2^{-F}$ 、最小値は -2^{I-1} となる。本報告の目的は、ウェーブレット内部の信号および乗算係数それぞれの値の小数部について、ウェーブレットが DC ロスレスとなる最小の語長を求めることである。

2.3. 丸め演算の定義と性質

語長を短縮するには丸め演算が用いられる。丸め演算には種々の定義があるが[14]、本報告では、

$$\begin{cases} O[q] = \lfloor q' \rfloor = q' - (q' \bmod 1) \\ q' = q + 2^{-1} \end{cases} \quad (2)$$

を例として用いる。また、これにより生じる誤差を、

$$\Delta_o[q] = q - O[q] \quad (3)$$

と表現する。更に、小数部を F [bit] に丸める処理を、

$$\begin{cases} F[q] = O[q2^F] 2^{-F} \\ \Delta_f[q] = q - F[q] = \Delta_o[q2^F] 2^{-F} \end{cases} \quad (4)$$

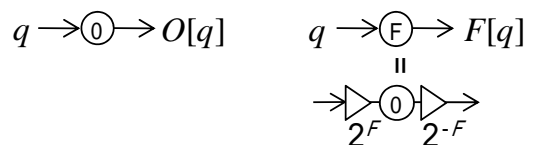
と記述し、図 3 のように表す。これらの丸め演算は、

$$\begin{cases} O[q] = 0 \Leftrightarrow q \in [-2^{-1}, 2^{-1}) \\ F[q] = 0 \Leftrightarrow q \in [-2^{-1-F}, 2^{-1-F}) \end{cases} \quad (5)$$

なる性質を持つ。とくに q が整数の場合は、式(2)より、

$$O[q+r] = q + O[r], \quad q \in \mathbf{Z}, \quad r \in \mathbf{R} \quad (6)$$

を導くことができる。



(a) 整数への丸め (b) 有理数への丸め

図 3 丸め演算の表現

3. 乗算の写像不変性と係数語長条件

ウェーブレットが DC ロスレスとなるためには、係数語長条件と信号語長条件の2つが同時に満たされる必要がある。はじめに、乗算の写像不変性を考察することで、個々の乗算器に関する係数語長条件を導く。

以下、図4に示す9/7ウェーブレットを例として議論する。図中の $h_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, K^{-1}, K は乗算係数を表し、これらの値は次式で与えられる[4]。

$$\begin{cases} h_1 = -1.586134342059924, & h_2 = -0.052980118572961 \\ h_3 = +0.882911075530934, & h_4 = +0.443506852043971 \\ K = +1.230174104914001, & K^{-1} = 0.812893066115961 \end{cases} \quad (7)$$

これらのいずれか一つを h とすると、乗算器では h の小数部が W [bit]に丸められた値、

$$W[h] = O[h2^W]2^{-W} \quad (8)$$

が乗算係数として用いられる。また、乗算結果の小数部は F (図4では F_1 または F_2) [bit]に丸められる。

ここで、乗算器への入力値を q とする。本報告では、乗算係数として $W[h]$ と h のいずれを用いた場合でも、乗算結果が同じ(写像が不変)、すなわち、

$$F[W[h]q] - F[hq] = 0 \quad (9)$$

を満たすように、乗算係数の語長 W [bit]を決定する。また、式(9)を満たす条件(係数語長条件)を、式(4),(5),(6)を適用することで以下のように導いた(証明は付録に示す)。

$$|\Delta_W[h]q - \Delta_F[hq]| < 2^{-1-F} \quad (10)$$

これにより、ウェーブレット内部の乗算係数 h について、与えられた信号語長 F [bit]において乗算が写像不変となるような最小語長 W_{min} [bit]を、特定の入力値 q に対して個別に求めることができる。

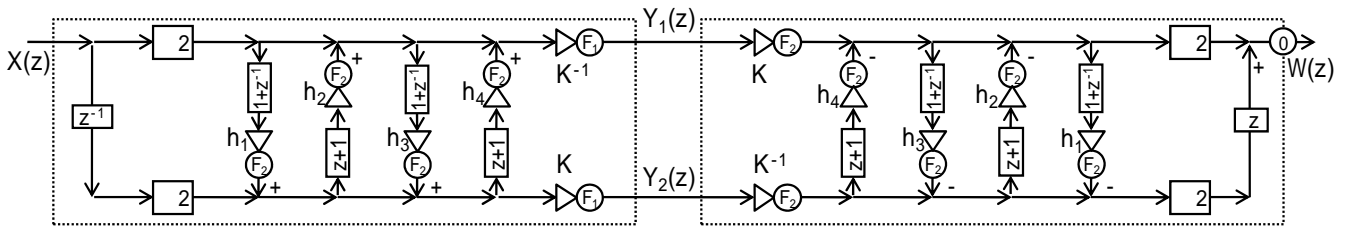


図4 ウェーブレット変換の回路構成

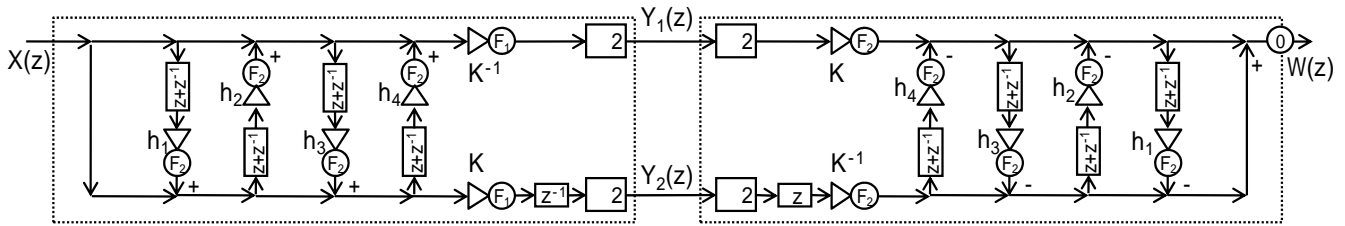


図5 任意の信号に対するウェーブレットの等価回路

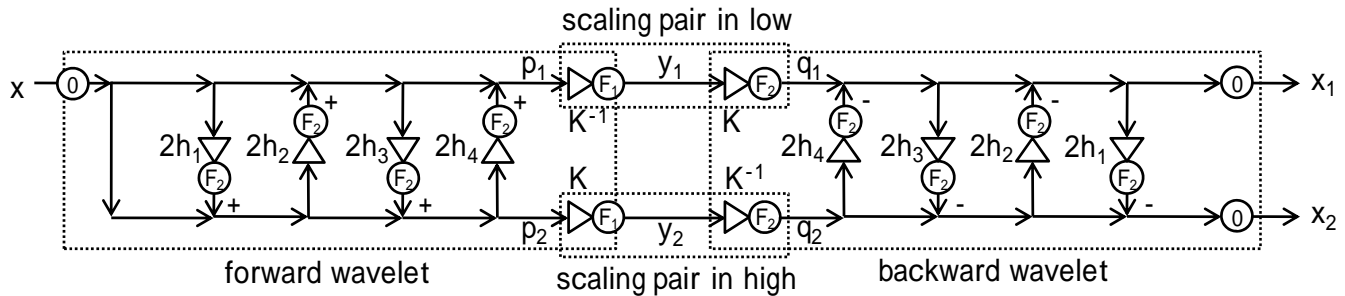


図6 DC信号に対するウェーブレットの等価回路

4. DC 等価回路と信号語長条件

4.1. ウェーブレットの DC 等価回路

図4の回路は、遅延器、ダウンサンプラ、アップサンプラの位置を移動することで、図5により等価表現できる。更に、入力が DC 信号の場合には遅延器 z が 1 に置き換えられるため、ウェーブレットは図6に等価変形できる。図中の x は入力される DC 信号の値を表す。また、 $b=1,2$ として、 x_b, y_b, p_b, q_b は全てスカラー値である。以下、3.に述べた係数語長条件のもとで、図6の DC 等価回路を用いて信号語長条件を導く。

4.2. 一般的な乗算対の可逆性

図4の 9/7 ウェーブレットの場合、 K や K^{-1} といったスケールが存在するため、任意の入力信号に対して可逆再生が保証されない[12]。そこで、図6に示される乗算対 (scaling pair) の可逆性を調べる。一般的な乗算対を図7に示す。ここで、

$$h_1 h_2 = 1 \quad (11)$$

である。本報告では、この乗算対が、

$$\begin{cases} r - q = 0 \\ r = F_2 [h_2 F_1 [h_1 q]] \end{cases} \quad (12)$$

を満たす場合、すなわち、ある入力値 q に対して可逆となる場合を考える。このための信号語長に対する条件を、 $q2^{F_2}$ が整数であるという仮定を追加して、式(4)、(5)、(6)より以下のように導出した(証明は付録に示す)。

$$\begin{cases} |h_2 \Delta_{F_1} [h_1 q]| < 2^{-1-F_2} \\ q2^{F_2} \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad (13)$$

更に、 q を任意の値とした条件を、次式のように導くことができる。

$$\begin{cases} F_1 > F_2 + \log_2 |h_2| \\ \forall q 2^{F_2} \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad (14)$$

特別な場合に上式は式(13)を含む。すなわち、式(14)のもとでは、ある値 q は式(13)を満たす。

4.3. ウェーブレットにおける乗算対の可逆性

入力が DC 信号の場合、図6の高域側の値 y_2 はゼロとなるため、高域側の乗算対では $q_2=p_2=0$ となる。一方、低域側の乗算対については、式(14)において $h_2=K^{-1}$ とおくことで、

$$F_1 - F_2 > \log_2 |K| = 0.2989 \quad (15)$$

を満たす場合に、任意の入力値 p_1 に対して $q_1=p_1$ となる。このとき、 $x_1=x_2=x$ となる。しかし、例えば帯域信号を整数化する場合、 $F_1=0$ と設定されるが、このときは式(14)を満たす正の整数 F_2 は存在しない。このため、任意の p_1 に対しては $q_1=p_1$ とならない。しかし、ウェーブレット内部では、 p_1 はある特定の値しかとらない

ため、 $q_1=p_1$ となる正の整数 F_2 が存在する。

F_2 が十分大きければ図6の回路は図9と等価となる。同図における乗算対は、式(14)において $h_2=K, F_1=F_2, F_2=F_1$ とおき、更に F_2 が十分大きい場合に相当する。従って、

$$F_2 - F_1 > \log_2 |K^{-1}| = -0.2989 \quad (16)$$

を満たす場合に可逆となる。例えば、 $F_1=0$ のとき、0 を含む任意の正の整数 F_2 に対して式(16)は満たされる。このため、3.の係数語長条件下では、任意の整数 x に対して F_2 を適切に選ぶことで、ウェーブレットは DC ロスレスとなり得る。

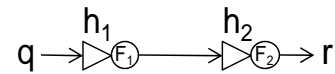


図7 一般的な乗算対

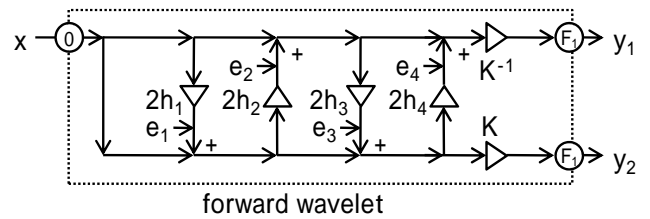


図8 順変換の DC 等価回路

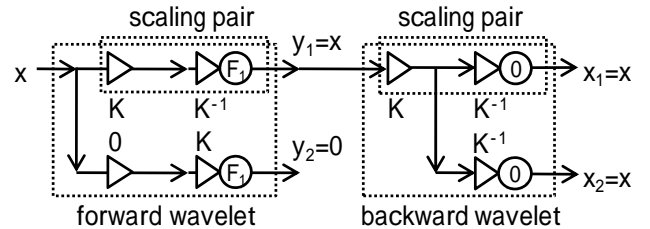


図9 F_2 が十分大きい場合の DC 等価回路

4.4. 累積誤差と信号語長条件

乗算直後の丸め処理において誤差 $e_i, i \in \{1,2,3,4\}$ が信号に重畳すると考えると、図6における順変換は図8のように表現される。このとき、

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} e_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2h_4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2h_3 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} e_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2h_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ e_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2h_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x \right) \right) \right) \right) \quad (17)$$

と記述される。上式に、9/7 ウェーブレットが持つ以下の特性[4]、

$$\begin{bmatrix} 1 + (1+h'_1)h'_2 \\ (1+h'_1) + Kh'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h'_i = 2h_i, \quad i \in \{1,2,3,4\} \quad (18)$$

および $e_1=e_2=e_3=e_4=0$ を代入すると、

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix}^t \quad (19)$$

となる．これは，丸め誤差が存在しない場合に出力される値を意味している．そこで，丸め誤差が存在する場合の累積誤差を，

$$\begin{bmatrix} e_{y1} & e_{y2} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix}^t \quad (20)$$

と定義する．上式に式(17), (18)を代入することで，

$$\begin{bmatrix} e_{y1} \\ e_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} h'_2 + (1 + h'_2 h'_3) h'_4 & 1 + h'_3 h'_4 & h'_4 & 1 \\ 1 + h'_2 h'_3 & h'_3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を得る．本報告における信号語長条件は，上式の累積誤差を0とするのに必要となる，信号の語長が満たすべき条件を意味する．

5. DC ロスレスのための必要最小語長

はじめに，ウェーブレット内の全ての乗算器が係数語長条件を満たすと仮定して，与えられた F_1 に対する信号語長 F_2 の，信号語長条件を満たす最小の値を求める．次に，この最小値に対し，個々の乗算器の係数語長 W の，係数語長条件を満たす最小の値を求める．

5.1. L_2 ノルムによる解析

まず，式(20)を次式のように記述する．

$$e_{yb} = \sum_{n=1}^4 k_{bn} e_n, \quad b \in \{1,2\} \quad (22)$$

累積誤差 e_{yb} の分散が，図8最終段の丸め処理 $F_1[\]$ による誤差の分散に比べて十分小さいことは， e_n の値が互いに無相関かつ一様分布という仮定では，

$$\sigma_{e_{yb}}^2 = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^4 (k_{bn} 2^{-F_2})^2 \ll \frac{1}{12} (2^{-F_1})^2, \quad b \in \{1,2\} \quad (23)$$

と表される．これより，

$$F_2 > F_1 + \log_2 \sqrt{\sum_{n=1}^4 k_{bn}^2}, \quad b \in \{1,2\} \quad (24)$$

が得られ， $F_1=0$ のとき， $b=1, 2$ に対してそれぞれ $F_2 > 1.59$ ， $F_2 > 1.69$ として最小語長が導出される．

5.2. L ノルムによる解析

累積誤差 e_{yb} の最悪値 (L ノルム誤差) を式(22)により評価することで，

$$F_2 > F_1 + \log_2 \sum_{n=1}^4 |k_{bn}|, \quad b \in \{1,2\} \quad (25)$$

が得られる．これより， $F_1=0$ のとき， $b=1, 2$ に対して

それぞれ $F_2 > 2.04$ ， $F_2 > 2.14$ として最小語長が導かれる． L_2 ノルム解析よりも値が大きく厳しい条件となる．

表1 $F_1=0$ において
信号語長条件を満たす
最小の信号語長

I		x	$F_{2,min}$	
			low	high
8	B	16	2	2
	W	235	-1	0
10	B	64	2	2
	W	940	1	1

表2 $F_1=F_2=2$ において
係数語長条件を満たす
最小の係数語長

I	$W_{min} (F_2=2)$					
	h_1	h_2	h_3	h_4	K^{-1}	K
8	7	12	7	0	4	5
10	7	12	13	0	11	11

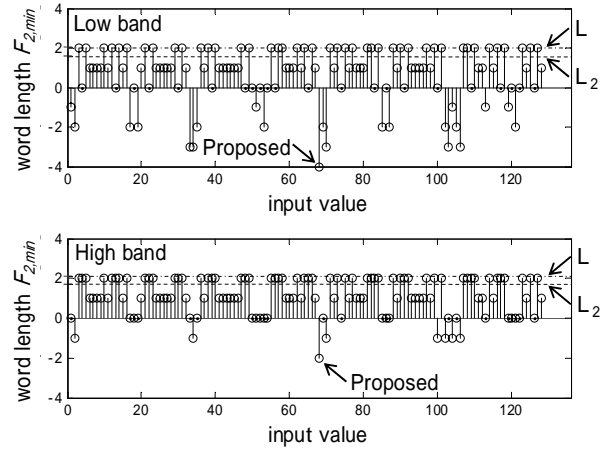


図10 $F_1=0$ において信号語長条件
を満たす最小の信号語長

5.3. 提案法による解析

本報告では，式(4)の表現を用い， e_n の値を，

$$e_n = p_n - q_n = \Delta_F [q_n], \quad n \in \{1,2,3,4\} \quad (26)$$

但し，

$$\begin{cases} p_n = F[q_n] \\ n \in \{1,2,3,4\} \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h_1 x \\ 2h_2(x + p_1) \\ 2h_3(x + p_2) \\ 2h_4(x + p_1 + p_3) \end{bmatrix} \quad (27)$$

として求める．このとき，帯域信号値 y_1, y_2 は，

$$\begin{cases} y_1 = F_1[K^{-1}(x + p_2 + p_4)] \\ y_2 = F_1[K(x + p_1 + p_3)] \end{cases} \quad (28)$$

と計算される．ある入力値 x に対する F_2 の最小語長を，

$$F_{2,min} = \{F_2 \in \mathbf{Z} \mid e_{y1} = 0, e_{y2} = 0, \forall F_2 > F_{2,min}\} \quad (29)$$

と定義し，式(26), (27)を式(21)に代入して式(29)を満たす F_2 の値を探索した． $F_1=0$ における結果を図10に示す． L ノルム解析の結果は，どの x に対してもDCロスレスを保証するが， L_2 ノルム解析では保障されない場合があることが確認できる．

本報告による解析により、信号の最小語長 $F_{2,\min}$ が、個々の x に対して過不足なく導かれることが確認できる。例えば、 $x=68$ では $F_2 = -4$ [bit] で $e_{y1}=0$ となり、 $F_2 = -2$ [bit] で $e_{y2}=0$ となる。従って、 $F_{2,\min}=-2$ [bit] であり、整数部の LSB 側の 2 [bit] を 0 にできる。文献[15]に規定されたホワイトバランス値に対する $F_{2,\min}$ を表 1 にまとめる。入力信号の語長は l [bit] である。例えば、 $x=235$ に対しては $F_{2,\min}=0$ [bit] であり、内部信号を整数にできる。この場合、 L_2 ノルムや L_1 ノルムで得られた値は、実際に必要な最小語長に対して過剰となっている。同表の例では、 $F_{2,\min}=2$ とすることでいずれの場合でも信号語長条件が満たされる。この場合について、係数語長条件を満たす乗算係数の最小語長 W_{\min} を表 2 に示す。DC 入力に対しては $y_2=0$ となるため、 h_4 は 0 [bit] にまで丸めてもよいことが分かる。この例では最大でも 13 [bit] となっている。このように信号語長条件と係数語長条件の双方が満たされる場合に、ウェーブレットは DC ロスレスとなる。

6. まとめ

ウェーブレットが DC ロスレスとなるための条件を、丸め演算を数式表現し、DC 等価回路と写像不変条件を導入することで、理論的に明らかにした。これにより、個々の入力値に対して過不足なく、信号と乗算係数の必要最小の語長を導出できることを確認した。

文 献

- [1] G. K. Wallace, "The JPEG Still Picture Compression Standard", IEEE Trans. Consumer Electron. vol.38, no.1, pp.108-124, 1992.
- [2] D. Legall "MPEG: A Video Compression Standard for Multimedia Applications", Communications of the ACM, vol.34, no.4, pp.46-58, 1991.
- [3] A. Descampe, F. O. Devaux, G. Rouvroy, J. D. Legat, J. J. Quisquater, B. Macq, "A Flexible Hardware JPEG 2000 Decoder for Digital Cinema", IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology, vol. 16, issue 11, pp.1397 - 1410, Nov. 2006
- [4] ISO/IEC FCD15444-1, "JPEG2000 Image Coding System," March 2000.
- [5] W. Sweldens, "The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets," Technical Report 1994:7, Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics, University of South Carolina, 1994.
- [6] H.Kiya, M.Yae, M.Iwahashi, "Linear Phase Two Channel Filter Bank allowing Perfect Reconstruction", IEEE International Symposium on Circuits and Systems, no.2, pp.951-954, May 1992.
- [7] Bing Fei Wu, Chung Fu Lin, "Memory-efficient architecture for JPEG 2000 coprocessor with large tile image, IEEE Trans. Circuits and Systems II, vol.53, issue 4, pp.304 - 308, April 2006.
- [8] M. Grangetto, E. Magli, M. Martina, G. Olmo, "Optimization and implementation of the integer wavelet transform for image coding", IEEE Trans.

Image Processing, Vol. 11, Issue 6, pp. 596-604, June 2002.

- [9] A. M. Reza, Lian Zhu, "Analysis of error in the fixed-point implementation of two-dimensional discrete wavelet transforms", IEEE Trans. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol.52, issue 3, pp.641-655, March 2005.
- [10] M. Primbs, "Worst-case Error Analysis of Lifting-based Fast DCT-algorithms", IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 53, pp.3211-3218, 2005.
- [11] Y. Tonomura, S. Chokchaitam, M. Iwahashi, "Minimum Hardware Implementation of Multipliers of the Lifting Wavelet Transform", IEEE International Conference on Image Processing, WA-L4, pp.2499-2502, Oct. 2004.
- [12] H. Kiya, M. Iwahashi, O. Watanabe, "A New Class of Lifting Wavelet Transform for Guaranteeing Losslessness of Specific Signals", IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, SPTM-L1, pp.3273-3276, March 2008.
- [13] M. Ebner, G. Tischler, J. Albert, "Integrating Color Constancy Into JPEG2000", IEEE Trans. Image Processing, vol.16, issue 11, pp.2697-2706, Nov. 2007.
- [14] IEEE Standard 754-1985, IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic.
- [15] The Society of Motion Picture and Television Engineers, "Standard for Television, 1920x1080 Image Sample Structure, Digital Representation and Digital Timing Reference Sequences for Multiple Picture Rates", SMPTE 274 M-2005, Feb. 2005.

付録 A. 式(10)の写像不変条件の証明

式(4), (6)より,

$$\begin{aligned} & F[W[h]q] \\ &= F[-\Delta_W[h]q + hq] \\ &= F[-\Delta_W[h]q + \Delta_F[hq] + F[hq]] \\ &= F[-\Delta_W[h]q + \Delta_F[hq]] + F[hq] \end{aligned}$$

なので、これを式(9)に代入することで、

$$F[-\Delta_W[h]q + \Delta_F[hq]] = 0$$

を得る。更に、式(5)を適用することで式(10)を得る。

付録 B. 式(13),(14)の乗算対ロスレス条件の証明

式(4), (6)より,

$$\begin{aligned} & F_2[h_2F_1[h_1q]] \\ &= O\left[-h_2\Delta_{F1}[h_1q]2^{F_2} + h_2h_1q2^{F_2}\right]2^{-F_2} \\ &= O\left[-h_2\Delta_{F1}[h_1q]2^{F_2} + \Delta_O[h_2h_1q2^{F_2}]\right]2^{-F_2} + F_2[h_2h_1q] \\ &= F_2[-h_2\Delta_{F1}[h_1q] + \Delta_{F2}[h_2h_1q]] + F_2[h_2h_1q] \end{aligned}$$

更に、 $h_2h_1=1$, $\forall q2^{F_2} \in \mathbf{Z}$ のとき、式(5), (6)より、

$$F_2[h_2F_1[h_1q]] = F_2[-h_2\Delta_{F1}[h_1q]] + q$$

なので、これを式(12)に代入して式(5)を適用することで式(13)を得る。また、

$$|h_2\Delta_{F1}[h_1q]| < |h_2|2^{-1-F_1} < 2^{-1-F_2}$$

なので、上式右側の不等式より式(14)を得る。