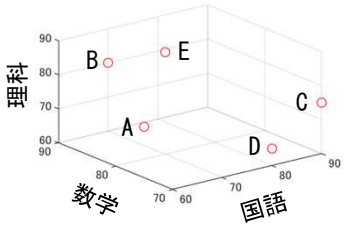
特徴を集約する
主成分分析
Principal Component Analysis

1. PCAで特長を集約
2. 活用例（ネットで検索）
3. PCAの手順（ミスユニバース）
4. PCAの手順（ポケモンGo）
5. PCAと最小二乗法

主成分分析とは？

3次元のデータ

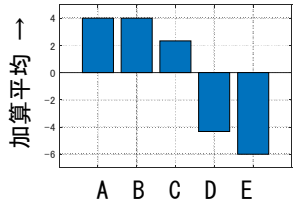


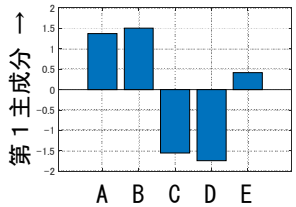
学生	国語	数学	理科
A	70	80	90
B	70	90	80
C	90	70	75
D	80	70	65
E	60	75	75

加算平均

PCA

1次元のデータ





最適な配分で
多数の特徴を１つに集約

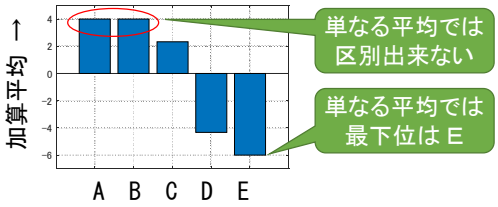
1つの特徴

[加算平均] =

[0.33　0.33　0.33] × [国語 数学 理科]

均等な配分

多数の特徴



1つの特徴

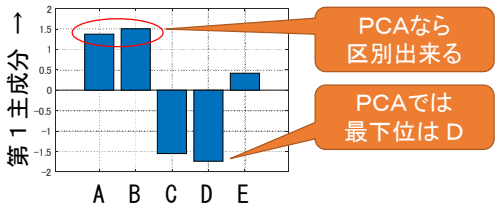
[第１主成分] =

[−0.53　0.63　0.57] × [国語 数学 理科]

最適な配分

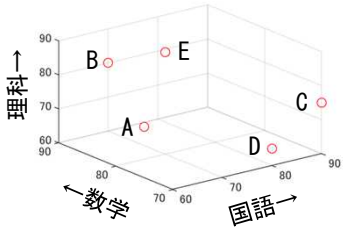
多数の特徴

第１主成分の
分散を最大とする



多数の特徴を２つに集約

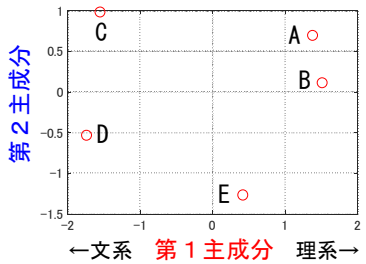
３次元のデータ



学生	国語	数学	理科	（３つの特徴）
A	70	80	90	
B	70	90	80	
C	90	70	75	
D	80	70	65	
E	60	75	75	

PCA

２次元のデータ



第１主成分	第２主成分	（２つの特徴）
1.38	0.70	
1.51	0.11	
−1.56	0.98	
−1.74	−0.53	
0.42	−1.27	

PCA の 手順（概要）

学生	国語	数学	理科 ← ３つの属性（多数の特徴）
A	70	80	90
B	70	90	80
C	90	70	75
D	80	70	65
E	60	75	75

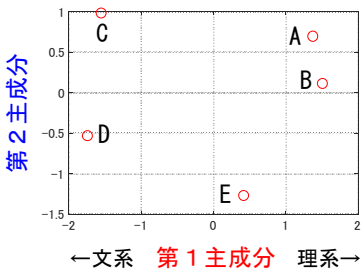
PCA

$$\begin{bmatrix}\text{第1主成分}\\ \text{第2主成分}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.53 & 0.63 & 0.57\\ 0.79 & 0.12 & 0.60\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{国語}\\ \text{数学}\\ \text{理科}\end{bmatrix}$$

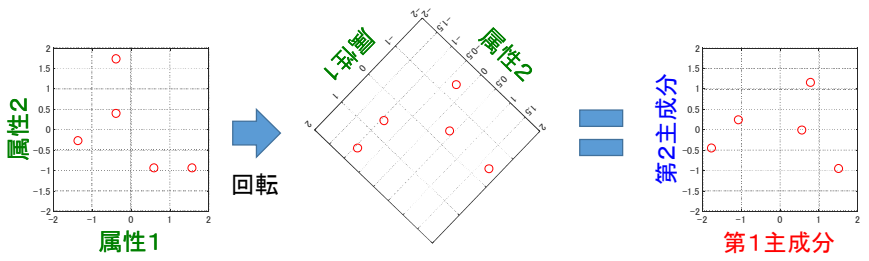
学生	第１主成分	第２主成分
A	1.38	0.70
B	1.51	0.11
C	-1.56	0.98
D	-1.74	-0.53
E	0.42	-1.27

寄与率
- 第１主成分 → 65.3 %
- 第２主成分 → 22.3 %

解釈
- 第１主成分 → 理系の力
- 第２主成分 → 広範な力



PCAは 特徴を 回転する



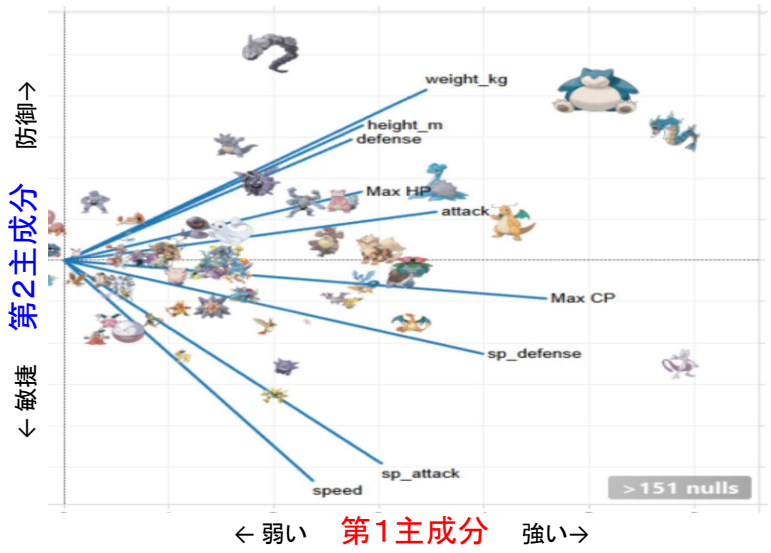
$$\begin{bmatrix}\text{第1主成分}\\ \text{第2主成分}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.71 & 0.71\\ -0.71 & -0.71\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{属性1}\\ \text{属性2}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}cos\frac{-3\pi}{4} & -sin\frac{-3\pi}{4}\\ sin\frac{-3\pi}{4} & cos\frac{-3\pi}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{属性1}\\ \text{属性2}\end{bmatrix}$$

特徴を集約する
主成分分析
Principal Component Analysis

1. PCAで特長を集約
2. 活用例（ネットで検索）
3. PCAの手順（ミスユニバース）
4. PCAの手順（ポケモンGo）
5. PCAと最小二乗法

種々の属性（戦闘力、体力、体重、身長、・・・）を 主成分分析

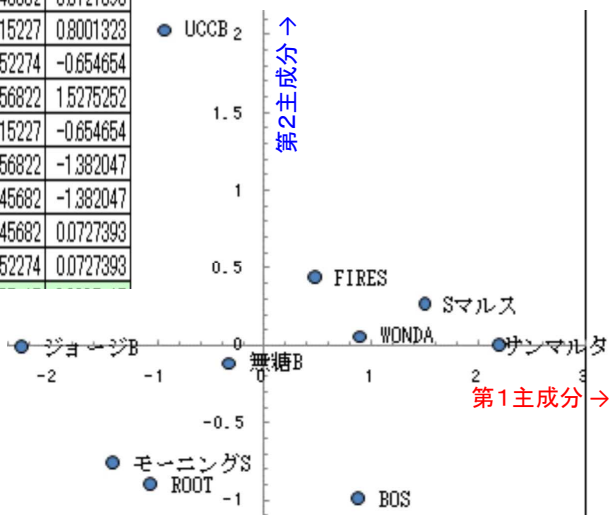


出典：秀和システム，岩橋智宏ほか，Tableauから始めるデータサイエンス

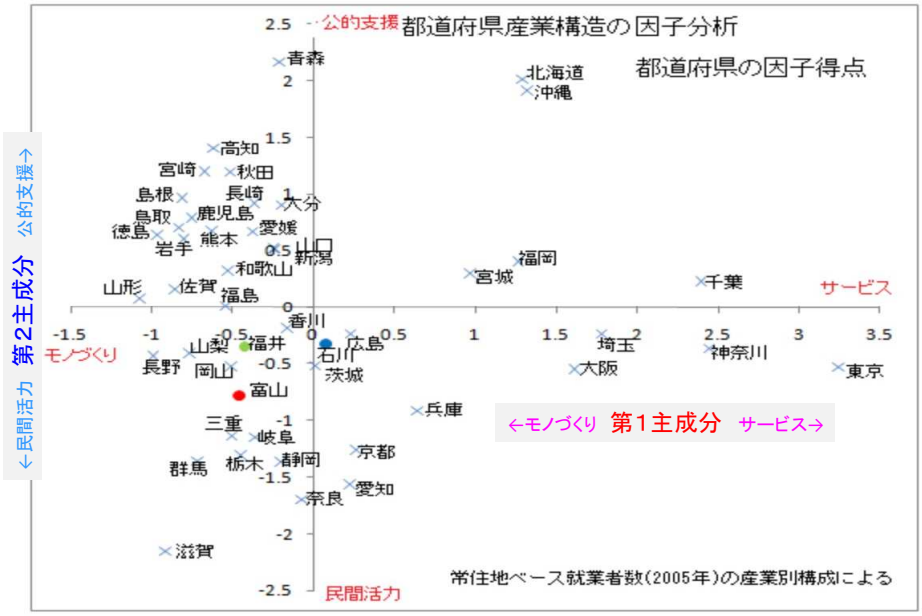
３つの属性（多数の特徴）

缶コーヒー名	コク	香り	酸味
Sマルタ	-0.116248	1.2456822	1.5275252
モーニングS	-1.278724	-1.245682	0.0727393
BOSS	1.0462287	-0.415227	0.8001323
FIRE	1.0462287	0.4152274	-0.654654
サンタマルタ	1.0462287	1.2456822	1.5275252
BLACK無糖	0.4649906	-0.415227	-0.654654
UCCB	-1.278724	1.2456822	-1.382047
ジョージアB	-1.278724	-1.245682	-1.382047
ROOT	-0.697486	-1.245682	0.0727393
WANDA無糖	1.0462287	0.4152274	0.0727393

缶コーヒー総合力1位はどれだ？
「コク」「香り」「酸味」



出典：マーケジン　https://markezine.jp/article/detail/17315



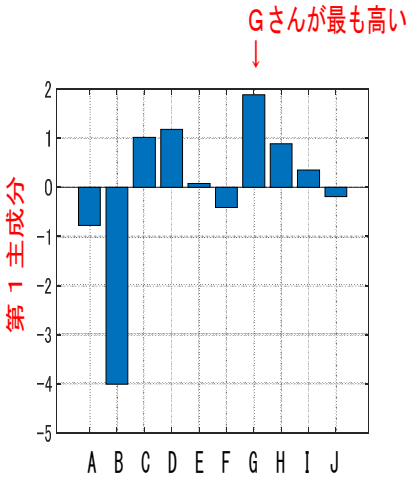
モノづくり県富山　－産業構造の多変量分析－
http://ww3.ctt.ne.jp/~seijiham/sangyo/rodo/koyokika/shugyo/multana/multana.html

特徴を集約する
主成分分析
Principal Component Analysis

1. PCAで特長を集約
2. 活用例（ネットで検索）
3. PCAの手順（ミスユニバース）
4. PCAの手順（ポケモンGo）
5. PCAと最小二乗法

PCAに出来ること

	身長	体重	V	W	H
Aさん→	165	53	86	56	92
Bさん→	160	47	84	52	92
Cさん→	166	55	86	64	89
Dさん→	164	56	90	60	95
Eさん→	168	55	87	56	87
Fさん→	164	54	87	57	92
Gさん→	168	54	94	58	97
Hさん→	169	55	88	57	92
Iさん→	169	53	86	58	93
Jさん→	166	56	84	57	90



5種類の特徴を
多数の属性（多数の特徴）

1つに集約できる
第１主成分

与えられたデータ

	身長	体重	V	W	H	
Aさん→	165	53	86	56	92	$= \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}$
Bさん→	160	47	84	52	92	
Cさん→	166	55	86	64	89	
Dさん→	164	56	90	60	95	
Eさん→	168	55	87	56	87	
Fさん→	164	54	87	57	92	
Gさん→	168	54	94	58	97	
Hさん→	169	55	88	57	92	
Iさん→	169	53	86	58	93	
Jさん→	166	56	84	57	90	

生のデータ
$= \boldsymbol{X}$

平均	165.9 53.8 87.2 57.5 91.9	$= \overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$
標準偏差	2.66 2.48 2.82 2.91 2.70	$= \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$

Tは転置

データを標準化する

	身長	体重	V	W	H	
Aさん→	-0.34	-0.32	-0.43	-0.52	0.04	
Bさん→	-2.22	-2.74	-1.13	-1.89	0.04	
Cさん→	0.04	0.48	-0.43	2.24	-1.07	
Dさん→	-0.71	0.89	0.99	0.86	1.15	
Eさん→	0.79	0.48	-0.07	-0.52	-1.81	
Fさん→	-0.71	0.08	-0.07	-0.17	0.04	
Gさん→	0.79	0.08	2.41	0.17	1.89	
Hさん→	1.16	0.48	0.28	-0.17	0.04	
Iさん→	1.16	-0.32	-0.43	0.17	0.41	
Jさん→	0.04	0.89	-1.13	-0.17	-0.70	$= \tilde{\boldsymbol{x}}_n^{\mathrm{T}}$

標準化されたデータ
$= \tilde{\boldsymbol{X}}$

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$$

データの標準化

	165.9 53.8 87.2 57.5 91.9	$= \overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$ ←標準化する前の平均
	2.66 2.48 2.82 2.91 2.70	$= \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$ ←標準化する前の標準偏差

分散共分散行列を計算

	身長	体重	V	W	H
身長 →	1.00	0.62	0.36	0.37	−0.04
体重 →	0.61	1.00	0.33	0.67	−0.11
V →	0.36	0.33	1.00	0.28	0.69
W →	0.37	0.67	0.28	1.00	−0.01
H →	−0.04	−0.11	0.69	−0.01	1.00

$$= \frac{1}{n}\tilde{X}^{\mathrm{T}}\tilde{X} = C_{xx}$$

分散共分散行列

C_{xx} に対する固有値問題

$$C_{xx}U = UL$$

問題を解く

固有値と固有ベクトルを計算

$$C_{xx}U = UL$$

```
[U,L] = eig(Cxx);
```

MATLABのコマンド

$L =$ 固有値

0.18	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.26	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.64	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	**1.54**	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	**2.37**

$U =$ 固有ベクトル

第２主成分の係数ベクトル ↓

0.10	0.46	−0.71	−0.18	0.49
0.37	−0.69	0.06	−0.29	0.55
−0.68	−0.24	−0.09	0.53	0.44
−0.11	0.48	0.69	−0.21	0.49
0.62	0.15	0.11	0.75	0.16

↑ 第１主成分の係数ベクトル

第1主成分 を計算

	身長	体重	V	W	H
Aさん→	−0.34	−0.32	−0.43	−0.52	0.04
Bさん→	−2.22	−2.74	−1.13	−1.89	0.04
Cさん→	0.04	0.48	−0.43	2.24	−1.07
Dさん→	−0.71	0.89	0.99	0.86	1.15
Eさん→	0.79	0.48	−0.07	−0.52	−1.81
Fさん→	−0.71	0.08	−0.07	−0.17	0.04
Gさん→	0.79	0.08	2.41	0.17	1.89
Hさん→	1.16	0.48	0.28	−0.17	0.04
Iさん→	1.16	−0.32	−0.43	0.17	0.41
Jさん→	0.04	0.89	−1.13	−0.17	−0.70

$= \tilde{X}$

標準化されたデータ

第１主成分の係数ベクトル

	0.49	
	0.55	
×	0.44	=
	0.49	
	0.16	

−0.78
−4.01
1.01
1.18
0.08
−0.41
1.88
0.88
0.35
−0.19

第１主成分

5種類の特長が → 1つに集約された

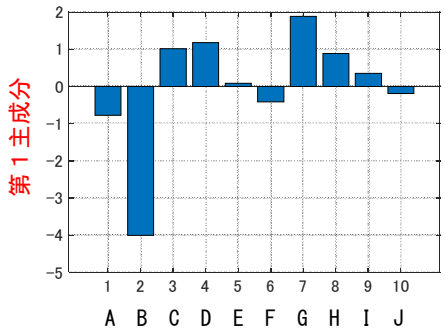
第1主成分 を表示

AからJはミスユニバース**日本**代表

Aさん→	−0.78
Bさん→	−4.01
Cさん→	1.01
Dさん→	1.18
Eさん→	0.08
Fさん→	−0.41
Gさん→	1.88
Hさん→	0.88
Iさん→	0.35
Jさん→	−0.19

第１主成分

Ｇさんが最も高い

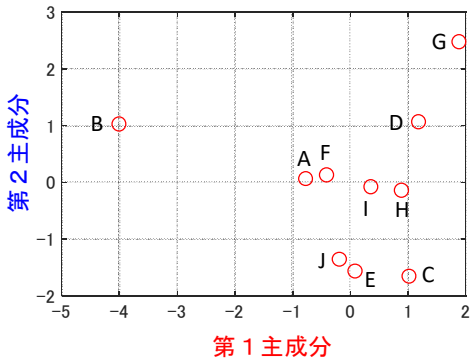


Gさん
昭和34年ミスユニバース
世界大会で優勝！

鈴木義一郎，情報量基準による統計解析入門，講談社サイエンティフィック

第2主成分 も計算

	第１主成分	第２主成分
Aさん→	−0.78	0.07
Bさん→	−4.01	1.03
Cさん→	1.01	−1.65
Dさん→	1.18	1.07
Eさん→	0.08	−1.56
Fさん→	−0.41	0.13
Gさん→	1.88	2.48
Hさん→	0.88	−0.14
Iさん→	0.35	−0.08
Jさん→	−0.19	−1.35



鈴木義一郎，情報量基準による統計解析入門，講談社サイエンティフィック

各成分 の 意味

第１主成分の係数ベクトル

	身長	体重	V	W	H			
Aさん→	−0.34	−0.32	−0.43	−0.52	0.04	×	0.49	←身長
							0.55	←体重
							0.44	←V
							0.49	←W
							0.16	←H

高く
重く
大きく
大きく

全体的な体格の良さ

第２主成分の係数ベクトル

	身長	体重	V	W	H			
Aさん→	−0.34	−0.32	−0.43	−0.52	0.04	×	−0.18	←身長
							−0.29	←体重
							0.53	←V
							−0.21	←W
							0.75	←H

軽く
大きく
小さく
大きく

プロポーションの良さ

PCAで 特徴量を 集約できた
各成分の寄与率

AからJは,
ミスユニバース日本代表

データは,
体型に関する 5 種類の属性

PCA

第1主成分の 1 種類だけでも
47.5% を説明できる

第1と2主成分の 2 種類なら
78.3% を説明できる

第1~3主成分の 3 種類なら
91.1% を説明できる

寄与率（%）
3.6　5.2　12.8　30.8　47.5

$L =$ 固有値

0.18	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.26	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.64	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	1.54	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	2.37

第２主成分の係数ベクトル

$U =$ 固有ベクトル

0.10	0.46	-0.71	-0.18	0.49
0.37	-0.69	0.06	-0.29	0.55
-0.68	-0.24	-0.09	0.53	0.44
-0.11	0.48	0.69	-0.21	0.49
0.62	0.15	0.11	0.75	0.16

第１主成分の係数ベクトル

特徴を集約する
主成分分析
Principal Component Analysis

1. PCAで特長を集約
2. 活用例（ネットで検索）
3. PCAの手順（ミスユニバース）　MATLAB
4. PCAの手順（ポケモンGo）
5. PCAと最小二乗法

MATLAB

① 元のデータ

```
close all; clear all;
%---------------------- 元のデータ
X=[
   165    53    86    56    92;
   160    47    84    52    92;
   166    55    86    64    89;
   164    56    90    60    95;
   168    55    87    56    87;
   164    54    87    57    92;
   168    54    94    58    97;
   169    55    88    57    92;
   169    53    86    58    93;
   166    56    84    57    90
   ];
```

MATLAB

② PCAの計算

```
[n1,n2]=size(X);
%---------------------- データを標準化
する
xm=mean(X);
% xs=std(X,0);% N-1 で正規化
xs=std(X,1);  % N   で正規化
Xt=(X-xm)./xs;

%---------------------- 分散共分散行列
を計算
Cxx=Xt'*Xt;
Cxx=Cxx/n1;

%---------------------- 固有値問題
[U,L] = eig(Cxx);

%---------------------- 主成分
Y=Xt*U;
```

MATLAB

③ 計算の結果

```
%---------------------- 各成分の寄与率
fprintf("寄与率¥n");
    for j=1:n2
        fprintf("%5.1f ",L(j,j)/sum(L(:))*100);
    end; fprintf("¥n");

%---------------------- 図示：第1主成分と第2主成分
figure('Position',[010 010 300 200]);
plot(Y(:,n2),Y(:,n2-1),'or'); grid on;

%---------------------- 図示：元のデータ
figure('Position',[010 210 300 200]);
plot3(X(:,1),X(:,2),X(:,3),'or'); grid on;

%---------------------- 図示：第1主成分
figure('Position',[310 010 300 200]);
bar(Y(:,n2)); grid on;
```

MATLAB

①~③全体

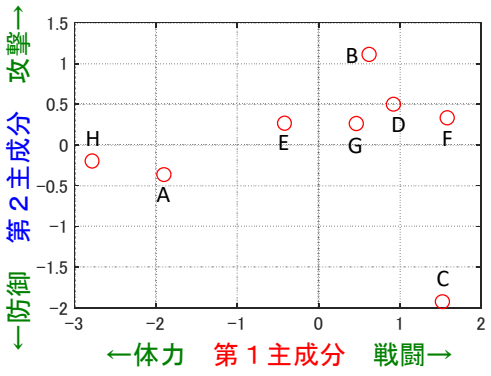
```
    235 193 310;
    239 261 193;
    330 190 169;
    189 280 215;
    264 226 190;
    487  60 128
    ];
end
[n1,n2]=size(X);
%---------------------- データを標準化
する
xm=mean(X);
% xs=std(X,0);% N-1 で正規化
xs=std(X,1);  % N   で正規化
Xt=(X-xm)./xs;
%---------------------- 分散共分散行列
を計算
Cxx=Xt'*Xt;
Cxx=Cxx/n1;
%---------------------- 固有値問題
[U,L] = eig(Cxx);
%---------------------- 主成分
Y=Xt*U;
%---------------------- 各成分の寄与率
fprintf("寄与率¥n");
```

特徴を集約する
主成分分析
Principal Component Analysis

1. PCAで特長を集約
2. 活用例（ネットで検索）
3. PCAの手順（ミスユニバース）
4. PCAの手順（ポケモンGo）
5. PCAと最小二乗法

PCAに出来ること

		体力	攻撃	防御
A	ハピナス	496	129	169
B	ケッキング	284	290	166
C	ルギア	235	193	310
D	ガブリアス	239	261	193
E	カビゴン	330	190	169
F	パルキア	189	280	215
G	メルメタル	264	226	190
H	ラッキー	487	60	128



3種類の特長を　PCA　2種類に集約できる

与えられたデータ

	体力	攻撃	防御	
A. ハピナス	496	129	169	$= \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}$
B. ケッキング	284	290	166	
C. ルギア	235	193	310	
D. ガブリアス	239	261	193	
E. カビゴン	330	190	169	
F. パルキア	189	280	215	
G. メルメタル	264	226	190	
H. ラッキー	487	60	128	

生のデータ
$= \boldsymbol{X}$

平均	315.5 203.6 192.5	$= \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$
標準偏差	108.5 73.8 50.4	$= \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$

データを標準化する

	体力	攻撃	防御	
A. ハピナス	1.66	−1.01	−0.47	
B. ケッキング	−0.29	1.17	−0.53	
C. ルギア	−0.74	−0.14	2.33	
D. ガブリアス	−0.71	0.78	0.01	
E. カビゴン	0.13	−0.18	−0.47	
F. パルキア	−1.17	1.03	0.45	
G. メルメタル	−0.47	0.30	−0.05	
H. ラッキー	1.58	−1.95	−1.28	$= \tilde{\boldsymbol{x}}_n^{\mathrm{T}}$

標準化されたデータ
$= \tilde{\boldsymbol{X}}$

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$$
データの標準化

標準化前の平均	315.5 203.6 192.5	$= \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$
標準化前の標準偏差	108.5 73.8 50.4	$= \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$

分散共分散行列を計算

	体力	攻撃	防御
体力 →	1.00	−0.86	−0.62
攻撃 →	−0.86	1.00	0.32
防御 →	−0.62	0.32	1.00

$$= \frac{1}{n}\tilde{X}^{\mathrm{T}}\tilde{X} = C_{xx}$$

C_{xx} に対する固有値問題

$$C_{xx}U = UL$$

問題を解く

固有値と固有ベクトルを計算

$$C_{xx}U = UL$$

```
[U,L] = eig(Cxx);
```

MATLABのコマンド

$L =$ 固有値

0.07	0.00	0.00
0.00	0.70	0.00
0.00	0.00	2.29

$U =$ 固有ベクトル

第２主成分の係数ベクトル

0.75	−0.11	−0.65
0.59	0.55	0.58
0.29	−0.83	0.48

第１主成分の係数ベクトル

第1主成分 を計算

	体力	攻撃	防御
A. ハピナス	1.66	-1.01	-0.47
B. ケッキング	-0.29	1.17	-0.53
C. ルギア	-0.74	-0.14	2.33
D. ガブリアス	-0.71	0.78	0.01
E. カビゴン	0.13	-0.18	-0.47
F. パルキア	-1.17	1.03	0.45
G. メルメタル	-0.47	0.30	-0.05
H. ラッキー	1.58	-1.95	-1.28

$= \tilde{X}$

標準化されたデータ

× 第１主成分の係数ベクトル

-0.65
0.58
0.48

＝

-1.90
0.62
1.52
0.92
-0.42
1.58
0.46
-2.79

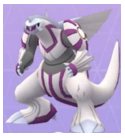
↑ 第１主成分

3種類の特長が ➡ 一つに集約された

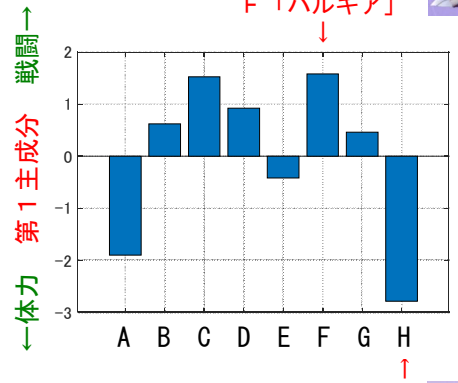
第1主成分 を表示

A. ハピナス	-1.90
B. ケッキング	0.62
C. ルギア	1.52
D. ガブリアス	0.92
E. カビゴン	-0.42
F. パルキア	1.58
G. メルメタル	0.46
H. ラッキー	-2.79

↑ 第１主成分

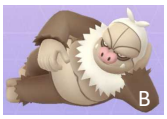


F「パルキア」

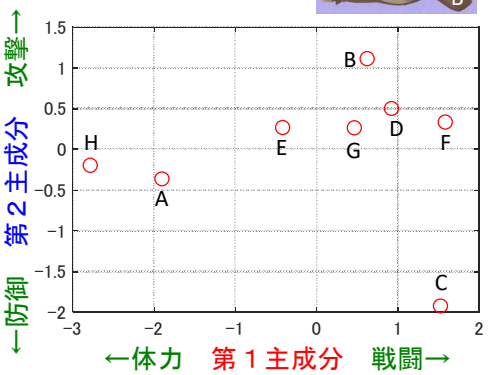


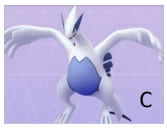
H「ラッキー」

第2主成分 も計算



	第１主成分	第２主成分
A. ハピナス	−1.90	−0.36
B. ケッキング	0.62	1.11
C. ルギア	1.52	−1.92
D. ガブリアス	0.92	0.50
E. カビゴン	−0.42	0.27
F. パルキア	1.58	0.34
G. メルメタル	0.46	0.26
H. ラッキー	−2.79	−0.20





各成分 の 意味

第１主成分の係数ベクトル

	体力	攻撃	防御			
ハピナス→	1.66	−1.01	−0.47	×	−0.65 ←体力 0.58 ←攻撃 0.48 ←防御	小さく 大きく 大きく

戦闘（攻防）か体力か

第２主成分の係数ベクトル

	体力	攻撃	防御			
ハピナス→	1.66	−1.01	−0.47	×	−0.11 ←体力 0.55 ←攻撃 −0.83 ←防御	--- 大きく 小さく

攻撃か防御か

PCAで 特徴量を 集約できた
各成分の寄与率

AからHは，
ポケモンのキャラクター

データは，
それぞれ，3 種類の属性

PCA

第1主成分の 1 種類だけでも
74.3 % を説明できる

第1と2主成分の 2 種類なら
97.7 % を説明できる

第1~3主成分の 3 種類なら
100 % を説明できる

寄与率（%）
2.3　23.4　74.3

L = 固有値

0.07	0.00	0.00
0.00	0.70	0.00
0.00	0.00	2.29

第２主成分の係数ベクトル

U = 固有ベクトル

0.75	−0.11	−0.65
0.59	0.55	0.58
0.29	−0.83	0.48

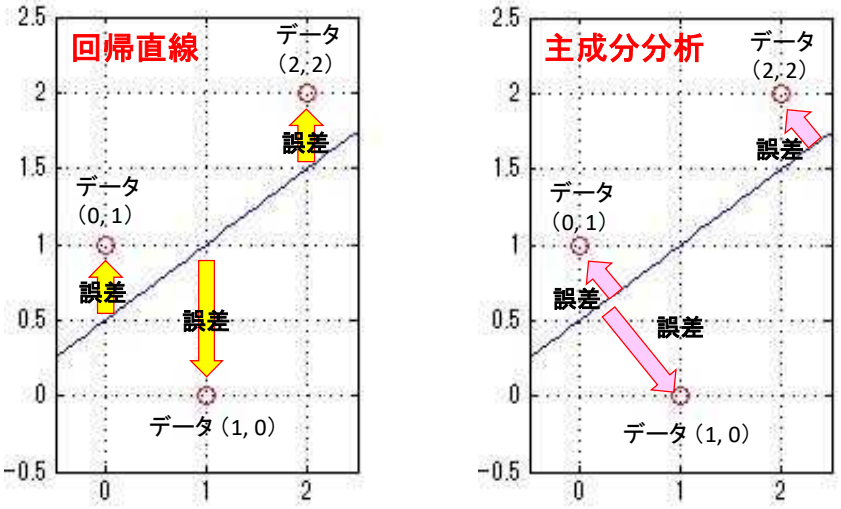
第１主成分の係数ベクトル

特徴を集約する
主成分分析
Principal Component Analysis

1. PCAで特長を集約
2. 活用例（ネットで検索）
3. PCAの手順（ミスユニバース）
4. PCAの手順（ポケモンGo）
5. PCAと最小二乗法

参考

線形回帰と主成分分析



参考

共分散行列の固有値問題

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \arg\min_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}\boldsymbol{u} \quad s.t.\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = 1$$

$$J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}\boldsymbol{u} - \lambda(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} - 1)$$

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} = 2\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}\boldsymbol{u} - 2\lambda\boldsymbol{u} = 0$$

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{L}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{L} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \\ \boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m) \end{cases}$$

原田達也「画像認識」講談社

参考

主成分の分散を最大化（1/2）

入力データ
(n個，2次元)　$\tilde{\boldsymbol{x}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i,1} \\ \tilde{x}_{i,2} \end{bmatrix}$　$(i = 1,2,\cdots,n)$

係数ベクトル　$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$　但し，$u_1^2 + u_2^2 = 1$　とする

主成分　$y_i = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i,1} \\ \tilde{x}_{i,2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}\,\tilde{\boldsymbol{x}}_i$

主成分の分散　$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$　を最大化するように
係数ベクトル $\boldsymbol{u}$ を決めよ

参考

主成分の分散を最大化（2/2）

主成分の分散

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(u_1\tilde{x}_{i,1} + u_2\tilde{x}_{i,2}\right)^2$$

← 入力データは標準化されているので平均はゼロ

$$= u_1^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_1^2 + 2u_1u_2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_{i,1}\tilde{x}_{i,2} + u_2^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_2^2$$

$$= u_1^2 s_{11} + 2u_1u_2s_{12} + u_2^2 s_{22}$$

最小二乗法

$$(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \arg\min_{u_1,u_2} V \quad s.t. \quad u_1^2 + u_2^2 = 1$$

$$L = u_1^2 s_{11} + 2u_1u_2s_{12} + u_2^2 s_{22} - \lambda\left(u_1^2 + u_2^2 - 1\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = 2u_1s_{11} + 2u_2s_{12} - 2\lambda u_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = 2u_1s_{12} + 2u_2s_{22} - 2\lambda u_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} s_{11} - \lambda & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} - \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C_{xx}} \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}$$

$$(\boldsymbol{C_{xx}} - \lambda\,\mathbf{I})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

固有値問題