練習問題

練習問題１

$\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$

0/5 分

0秒

右表のデータについて
回帰直線と予測値を求めよ

i	x(i)	y(i)
1	0	2
2	1	1
3	2	3
4	3	**予測値？**

ただし、回帰直線を

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

とすると、

$$\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

平均

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

分散と共分散

$$\begin{cases} s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \\ s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \end{cases}$$

練習問題１（解説1/2）

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{0+1+2}{3} = 1 \\ \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{2+1+3}{3} = 2 \end{cases}$$

i	x(i)	y(i)
1	0	2
2	1	1
3	2	3
4	3	

$$\begin{cases} s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(0-1)^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2}{3} = \frac{2}{3} \\ s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{(0-1)(2-2) + (1-1)(1-2) + (2-1)(3-2)}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{1/3}{2/3} = 0.5$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 2 - \frac{1}{2}\cdot 1 = 1.5$$

$$y = 1.5 + 0.5x$$

回帰直線

練習問題１（解説2/2）

$$\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = 0.5$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \;= 1.5$$

以上より、回帰直線は

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

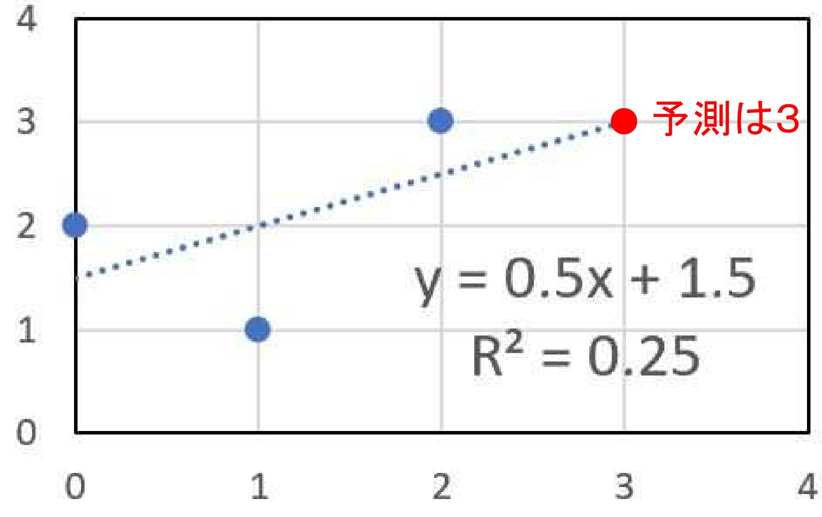
$$= 1.5 + 0.5\,x$$

このとき、x =3 ならば

$$y = 1.5 + 0.5 \cdot 3$$

$$= 3$$ ← **予測値**

i	x(i)	y(i)
1	0	2
2	1	1
3	2	3
4	3	**予測は３**



長岡技術科学大学 Nagaoka University of Technology Iwahashi

練習問題２

0/5 分
0秒

右表のデータについて
回帰直線を求めよ

i	x(i)	y(i)
1	0	2
2	1	1
3	2	3
4	3	予測値？

ただし、回帰直線を

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

とすると、

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{Y}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x(1) \\ 1 & x(2) \\ 1 & x(3) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix}$$

添え字の *T* は転置、-1 は逆行列

練習問題２（解説）

$(\boldsymbol{X}^T\ \boldsymbol{X})^{-1}\ \boldsymbol{X}^T$ ← 疑似逆行列

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$y = 1.5 + 0.5x$

練習問題１と同じ

多項式（m-1次）に回帰

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_{m-1} x^{m-1}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix}$$

$(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{a})$ の２乗の総和を最小にする

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \left(\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{Y}$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{m-1} \end{bmatrix}$$

n行×m列
縦長（n>m）

変数が　m 個
方程式が n 個

以上です