国立大学法人 長岡技術科学大学
Nagaoka University of Technology

電気電子情報工学専攻　岩橋政宏
iwahashi@vos.nagaokaut.ac.jp

4．周波数解析の方法

4.1 フーリエ変換　（振幅特性と模様の細かさ）　1Dの例

4.2 フーリエ変換　（位相特性と模様の位置）

4.3 フィルタの周波数特性

4.4 フーリエ変換の数理

離散フーリエ変換（DFT）

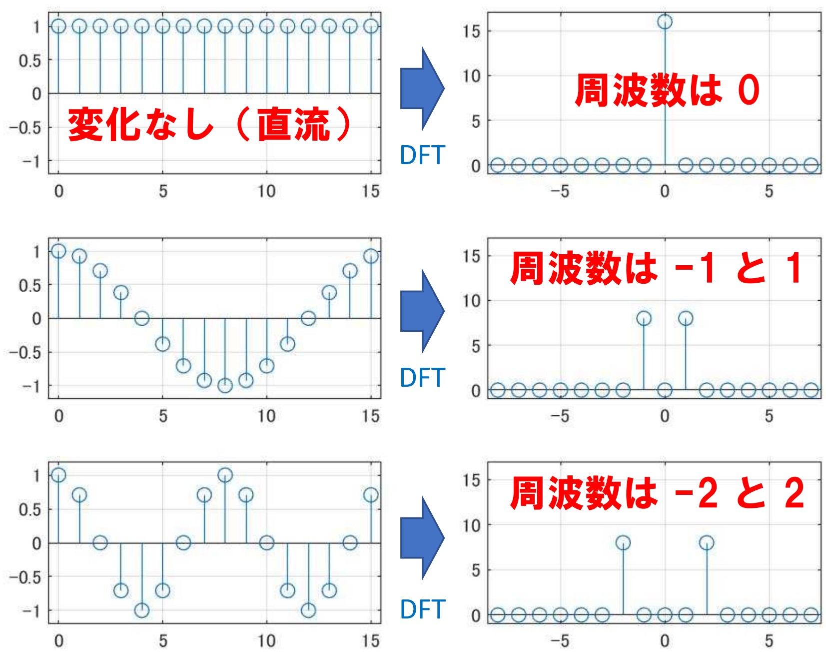
N=16 の例

周波数 振幅特性

$x(n) = \cos(0\ \omega_0 n)$

$x(n) = \cos(1\ \omega_0 n)$

$x(n) = \cos(2\ \omega_0 n)$



画素の位置 n　　周波数

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

画像サイズを1周期とする基本周波数

成分の大きさは振幅特性で

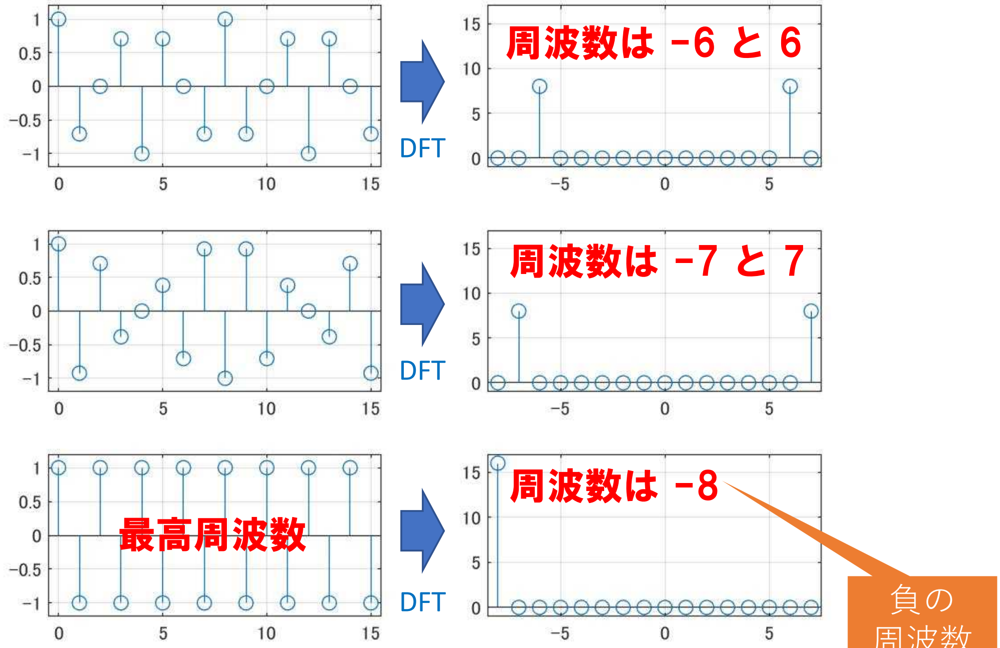
N=16 の例

周波数 振幅特性

$x(n) = \cos(6\,\omega_0 n)$

$x(n) = \cos(7\,\omega_0 n)$

$x(n) = \cos(8\,\omega_0 n)$



画素の位置 n　　周波数

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

画像サイズを1周期とする基本周波数

成分の大きさは振幅特性で

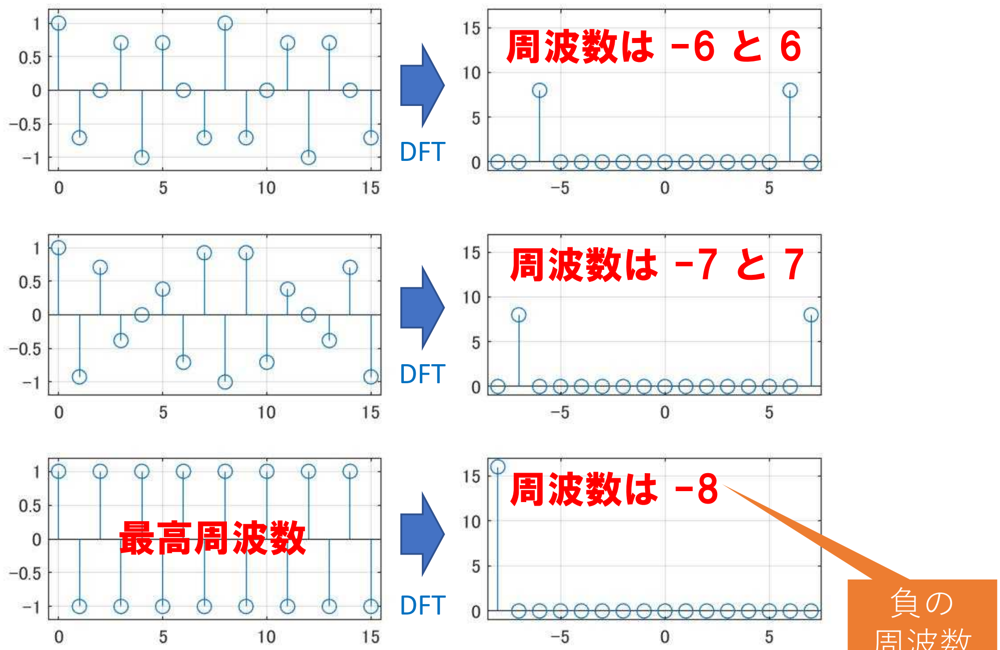
N=16 の例

周波数 振幅特性

$x(n) = \cos(6\,\omega_0 n)$

$x(n) = \cos(7\,\omega_0 n)$

$x(n) = \cos(8\,\omega_0 n)$

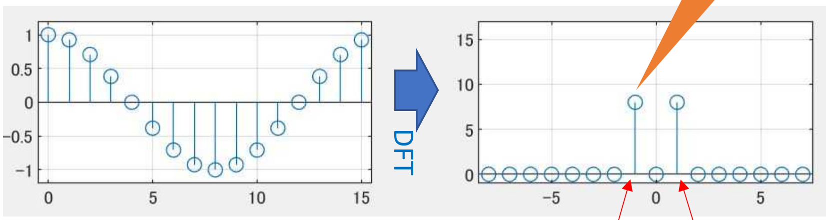


画素の位置 n　　周波数

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

画像サイズを1周期とする基本周波数

負の周波数とは？



周波数は −1 と 1

$$x(n) = \cos\left(1 \frac{2\pi}{N} n\right)$$

$$= \cos(1\ \omega_0 n) \quad = \frac{e^{-1\ \omega_0 nj}}{2} + \frac{e^{1\ \omega_0 nj}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{-xj} + e^{xj}}{2}$$

オイラーの公式
$\cos x + j \sin x = e^{jx}$

4．周波数解析の方法

4.1 フーリエ変換　（振幅特性と模様の細かさ）

4.2 フーリエ変換　（位相特性と模様の位置）　1Dの例

4.3 フィルタの周波数特性

4.4 フーリエ変換の数理

位置ズレは位相特性で

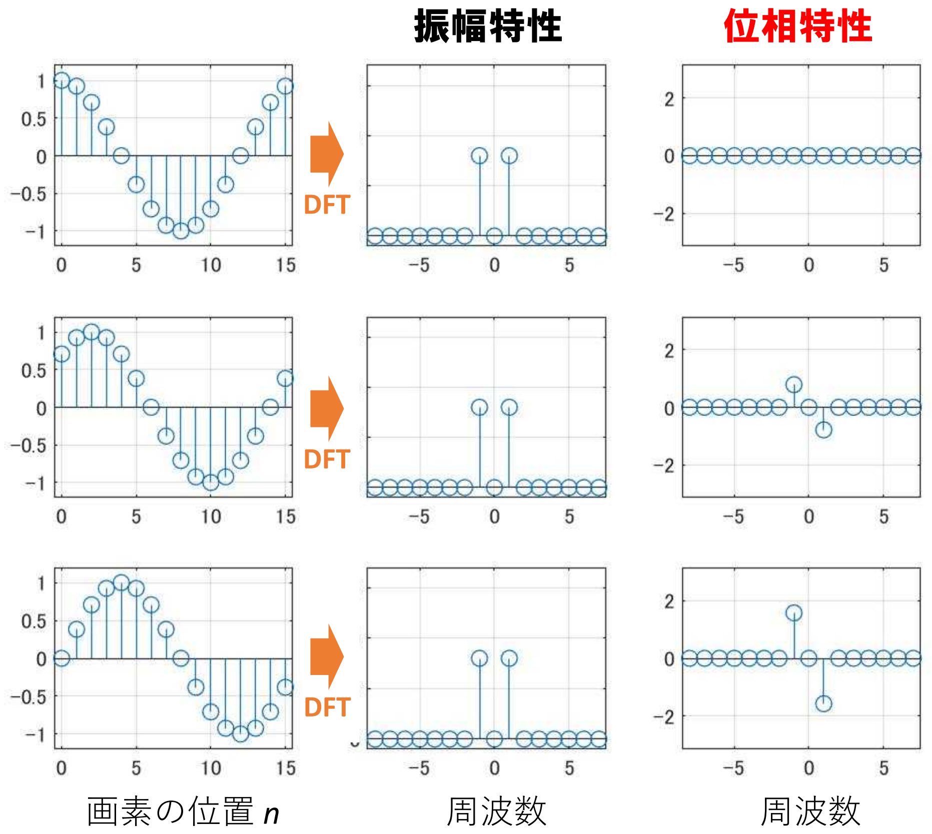
N=16 の例

$x(n) =$
$\cos(\omega_0 n)$

$x(n) =$
$\cos(\omega_0 (n-2))$

$x(n) =$
$\cos(\omega_0 (n-4))$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{N}$



位置ズレは位相特性で

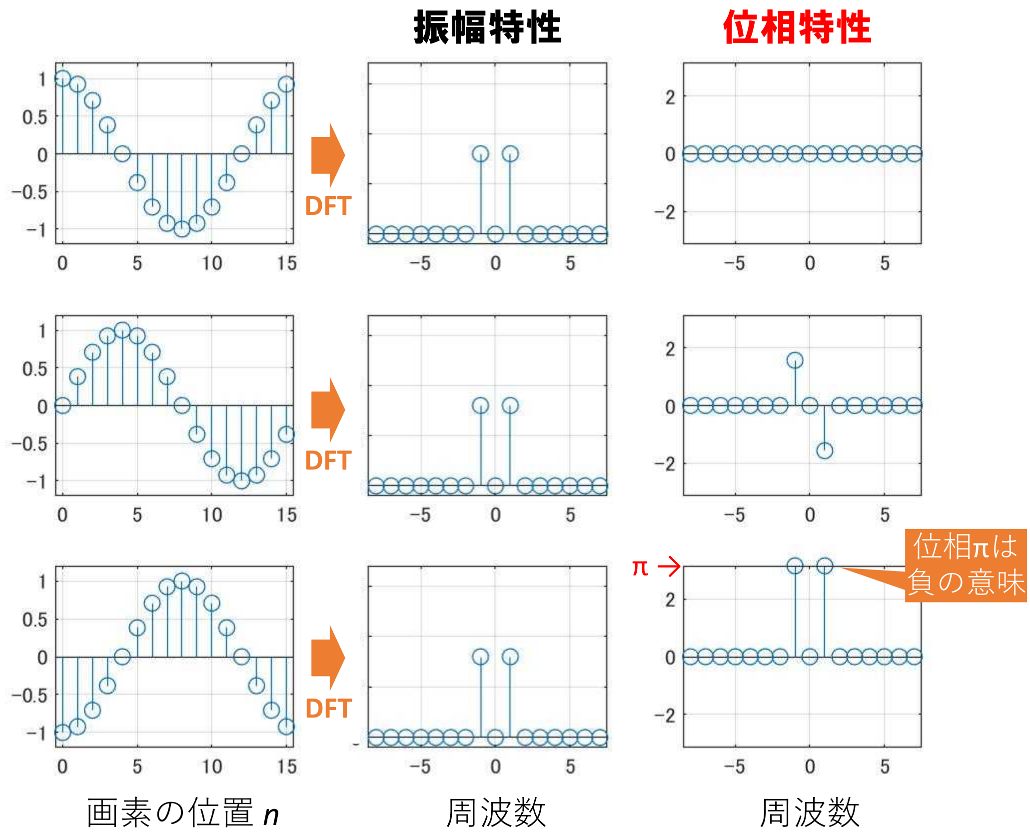
N=16 の例

$x(n) =$
$\cos(\omega_0 n)$

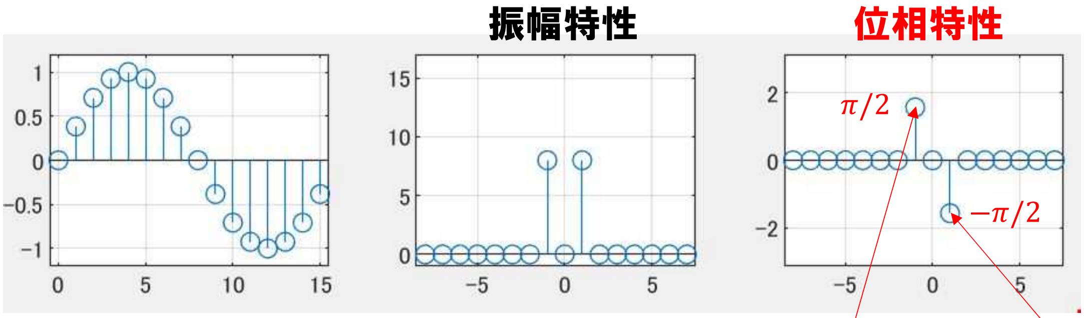
$x(n) =$
$\cos(\omega_0 (n-4))$

$x(n) =$
$\cos(\omega_0 (n-8))$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{N}$



cos と sin の区別は位相特性で



$$\sin(\omega_0 n) = -\frac{e^{-j\,\omega_0 n}}{2j} + \frac{e^{j\,\omega_0 n}}{2j} = \frac{e^{-j\,\omega_0 n}}{2}e^{j\pi/2} + \frac{e^{j\,\omega_0 n}}{2}e^{-j\pi/2}$$

$$\cos(\omega_0 n) = +\frac{e^{-j\,\omega_0 n}}{2} + \frac{e^{j\,\omega_0 n}}{2} = \frac{e^{-j\,\omega_0 n}}{2}e^{j\,0} + \frac{e^{j\,\omega_0 n}}{2}e^{-j\,0}$$

オイラーの公式

$$e^{j\underbrace{\boxed{x}}_{\text{位相}}} = \cos x + j\sin x$$

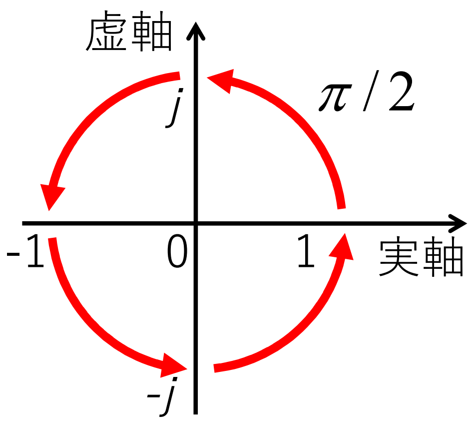
$$e^{0\cdot j} = \cos 0 + j\sin 0 = +1$$

$$e^{\pi\cdot j} = \cos\pi + j\sin\pi = -1$$

+1 は位相 0
−1 は位相 π

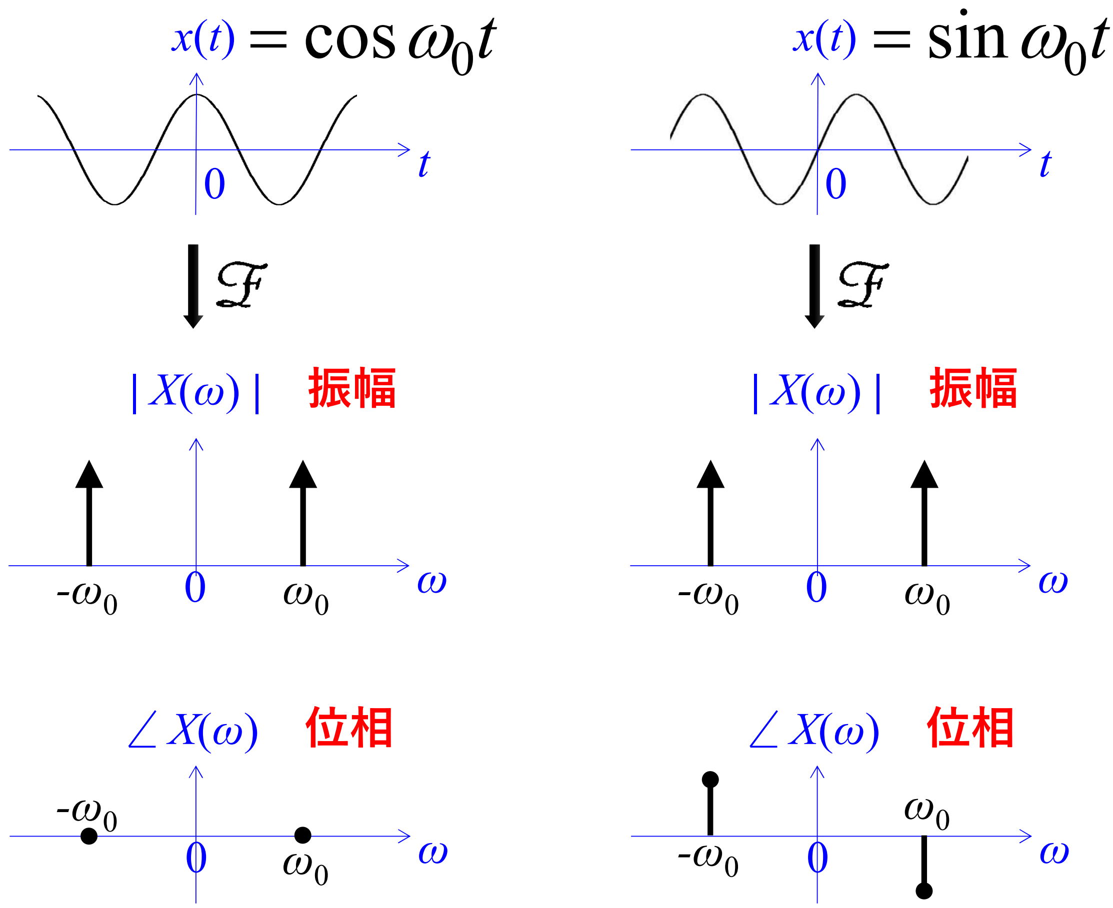
$$e^{\boxed{+\pi/2\cdot j}} = \cos\frac{1\cdot\pi}{2} + j\sin\frac{1\cdot\pi}{2} = +j = \boxed{-1/j}$$

$$e^{\underbrace{\boxed{-\pi/2\cdot j}}_{\text{位相}}} = \cos\frac{-\pi}{2} + j\sin\frac{-\pi}{2} = -j = \boxed{+1/j}$$

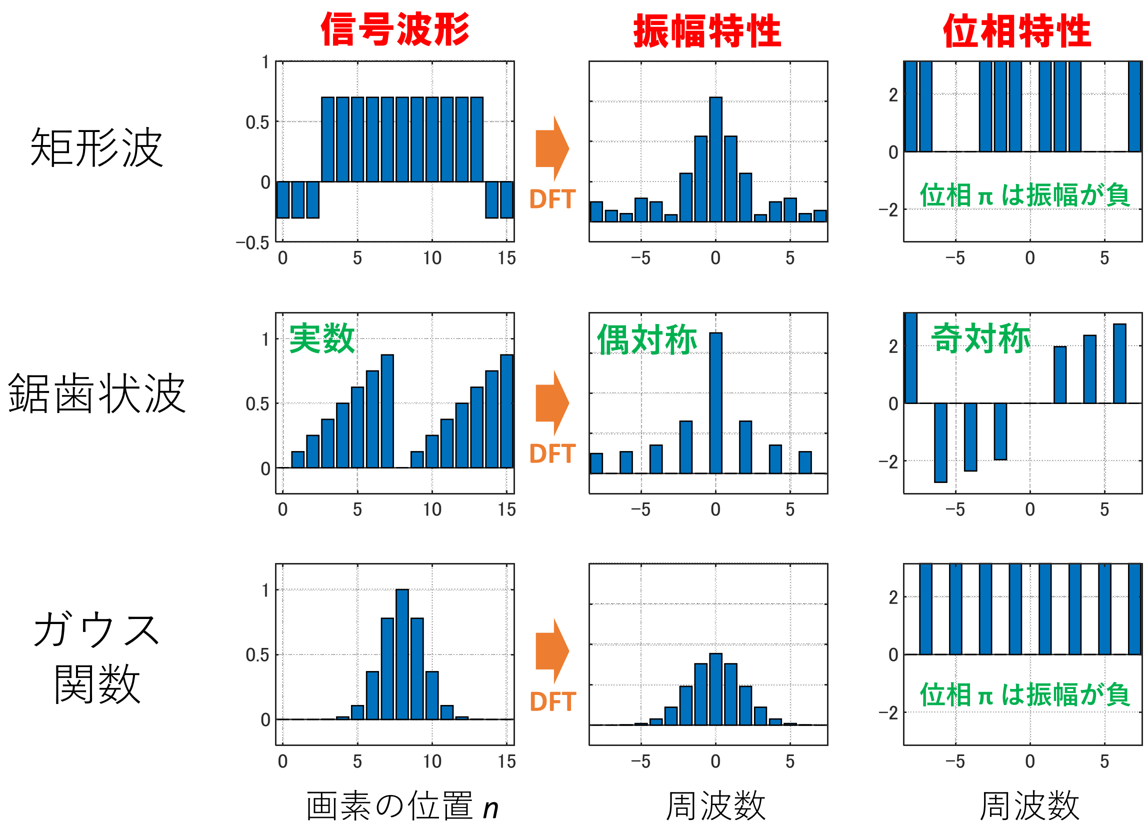


複素平面（ガウス平面）

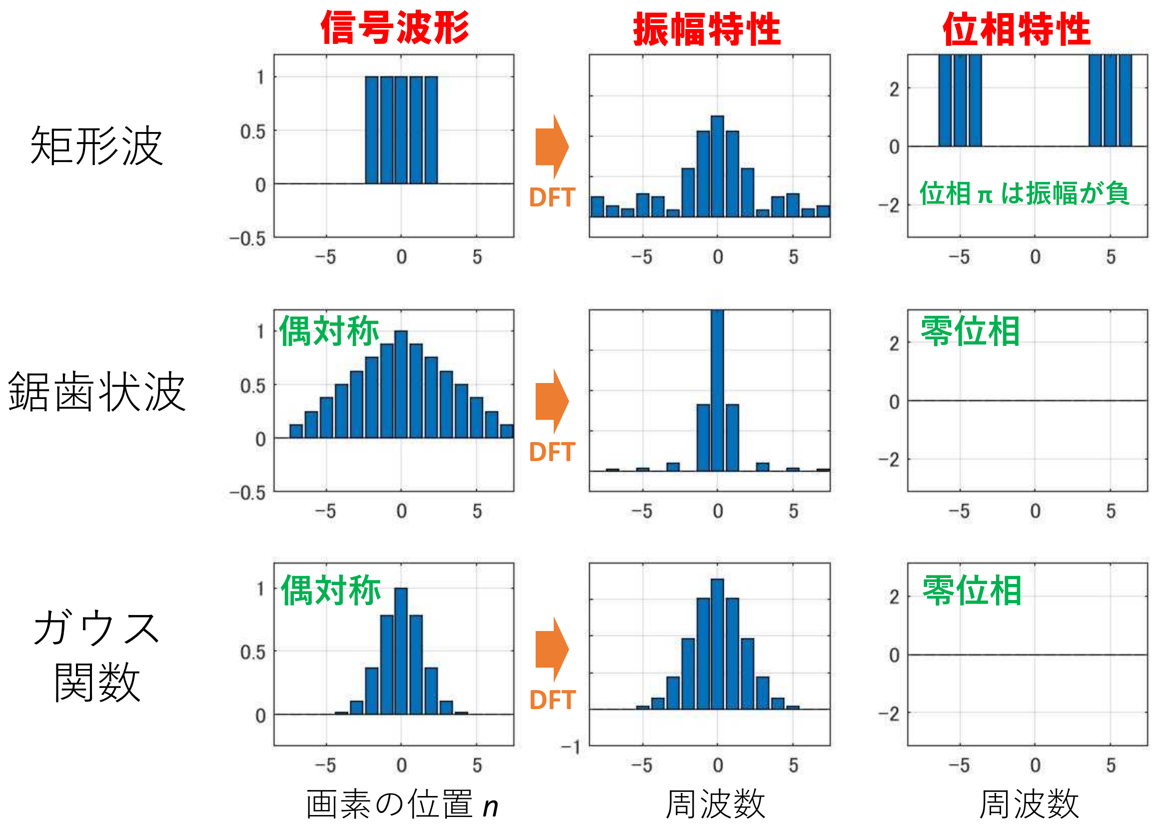
+j は位相 +π/2
−j は位相 −π/2



どんな波形でも合成（分析）できる



どんな波形でも合成（分析）できる



4． 周波数解析の方法

4.1 フーリエ変換 （振幅特性と模様の細かさ）

4.2 フーリエ変換 （DFT と FFT） 1Dの例

4.3 フィルタの周波数特性

4.4 フーリエ変換の数理

離散フーリエ変換 (DFT) による 波形の合成

波形 ＝ Σ 大きさ・基底 ÷N

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W^{-nk}$$

$n = 0,1,\cdots,N-1$

$W = e^{-j2\pi/N}$

基底 $W^{-nk} = e^{-j(2\pi/N)\,nk}$

$= \cos(k\omega_0\, n) - j\sin(k\omega_0\, n)$

$\omega_0 = 2\pi/N$

画像サイズを1周期
とする基本周波数

$\omega = k\omega_0$

↑角周波数 ↑周波数インデックス

離散フーリエ変換 (DFT) による 波形の分析

大きさ ＝（信号, 基底）

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W^{nk}$$

$k = 0,1,\cdots,N-1$

$W = e^{-j2\pi/N}$

$k\,\omega_0 = \omega$ ← 角周波数

↑
周波数インデックス

$\omega_0 = 2\pi/N$ ← 画像サイズを 1 周期
とする基本周波数

高速フーリエ変換（FFT）

$$N = 4 \quad W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

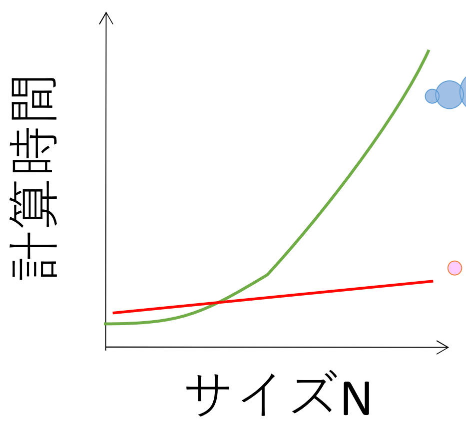
DFTで計算

計算結果は同じ

FFTで計算

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_4^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

高速フーリエ変換（FFT）の威力



DFTでは膨大な計算時間

$O(N^2)$

FFTで劇的な高速化

$O(N \log N)$

【問】N=2 と N=4を行列で表現せよ

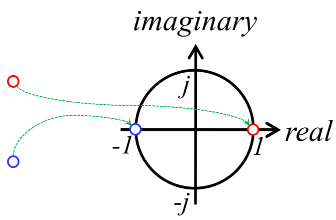
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \;, \qquad W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$N = 2 \quad \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & ? & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}$$

$$N = 4 \quad \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & ? & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

【解説】　N=2 の場合

$$W_2 = e^{-j2\pi/2} = e^{-j\pi} \;\Rightarrow\; \begin{cases} W_2^0 = (e^{-j\pi})^0 = e^0 = 1 \\ W_2^1 = (e^{-j\pi})^1 = e^{-j\pi} = -1 \end{cases}$$



以上より，

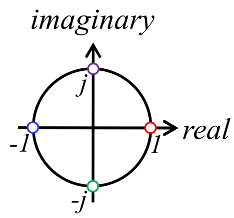
$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}$$

【解説】　N=4 の場合

$$W_4 = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2}$$

$$\begin{cases} W_4^0 = (e^{-j\pi/2})^0 = e^0 & = 1 \\ W_4^1 = (e^{-j\pi/2})^1 = e^{-j\pi/2} & = -j \\ W_4^2 = e^{-j\pi} \quad (= e^{j\pi}) & = -1 \\ W_4^3 = e^{-j3\pi/2} \quad (= e^{j\pi/2}) & = j \end{cases}$$



以上より,

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

【問】逆変換を行列で表現せよ（N=2 と N=4の場合）

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$N = 2 \quad \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{x}(1) \end{bmatrix} = \quad ? \quad \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix}$$

$N = 4$　のときは？

【解説】　N=2 の場合

順変換は,

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}$$

逆変換は,

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{x}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^{-0} & W_2^{-0} \\ W_2^{-0} & W_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix}$$

ここで,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{x}(1) \end{bmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{H}\,\mathbf{x}\ , & \textit{forward} \\ \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^{-1}\,\mathbf{X}\ , & \textit{backward} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^{T} \\ \textit{orthogonal} \end{matrix}}$$

【解説】　N=4 の場合

順変換は,
逆変換は,

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{H}\,\mathbf{x}\ , & \textit{forward} \\ \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^{-1}\,\mathbf{X}\ , & \textit{backward} \end{cases}$$

但し,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

このときも,

$$\boxed{\begin{matrix} \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^{T} \\ \textit{orthogonal} \end{matrix}}$$

が成り立つ。

4．周波数解析の方法

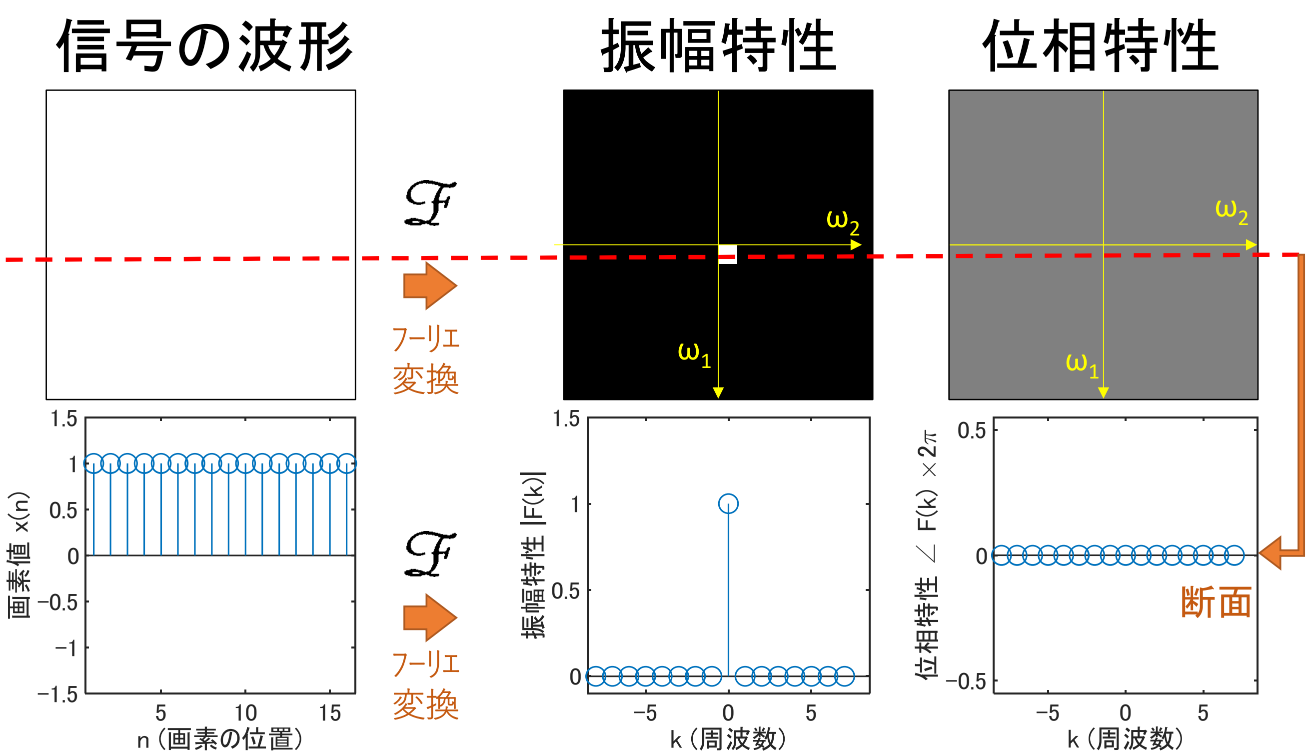
4.1 フーリエ変換　（振幅特性と模様の細かさ）　2Dの例

4.2 フーリエ変換　（位相特性と模様の位置）

4.3 フィルタの周波数特性

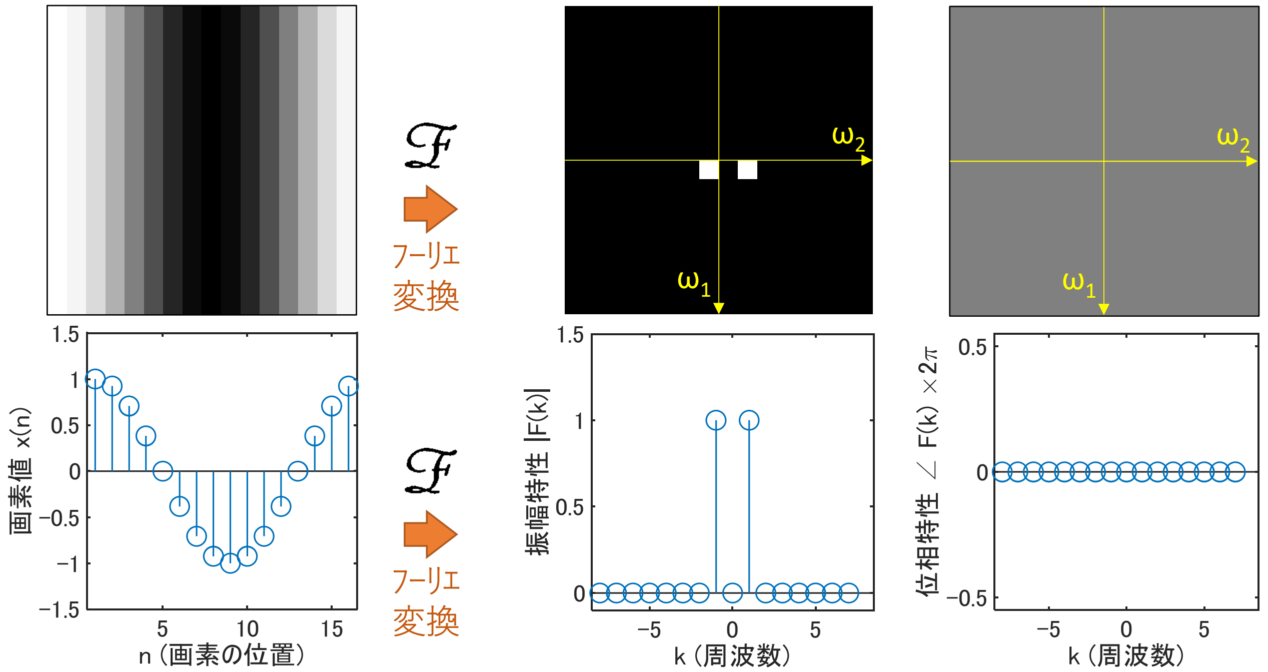
4.4 フーリエ変換の数理

4.1 フーリエ変換　模様なし



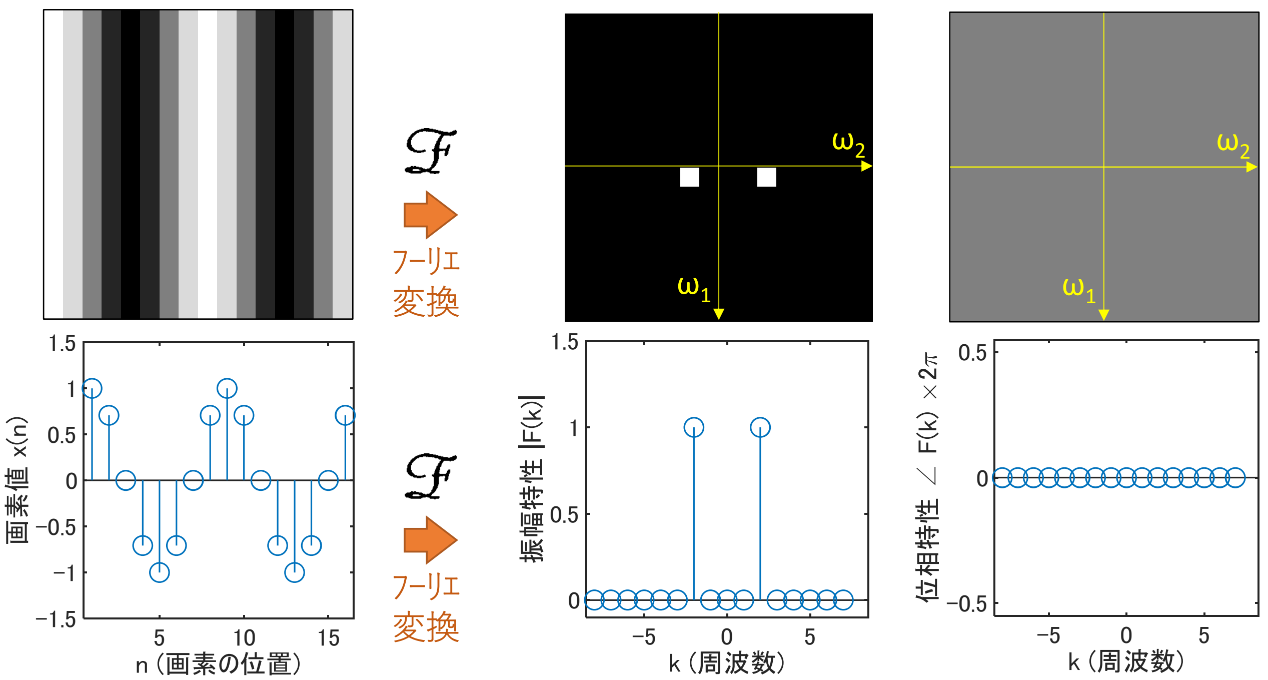
4.1 フーリエ変換、 緩やかな濃淡変化

信号の波形　　振幅特性　　位相特性

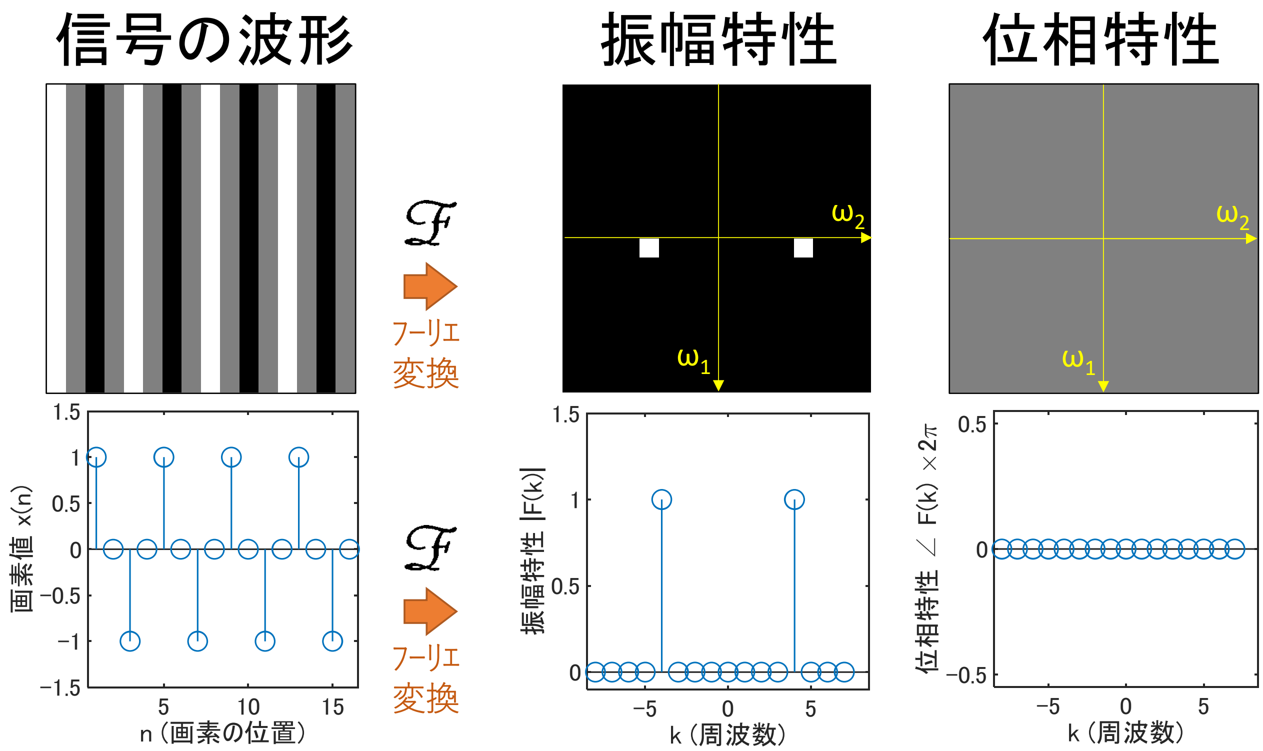


4.1 フーリエ変換　横方向の濃淡変化

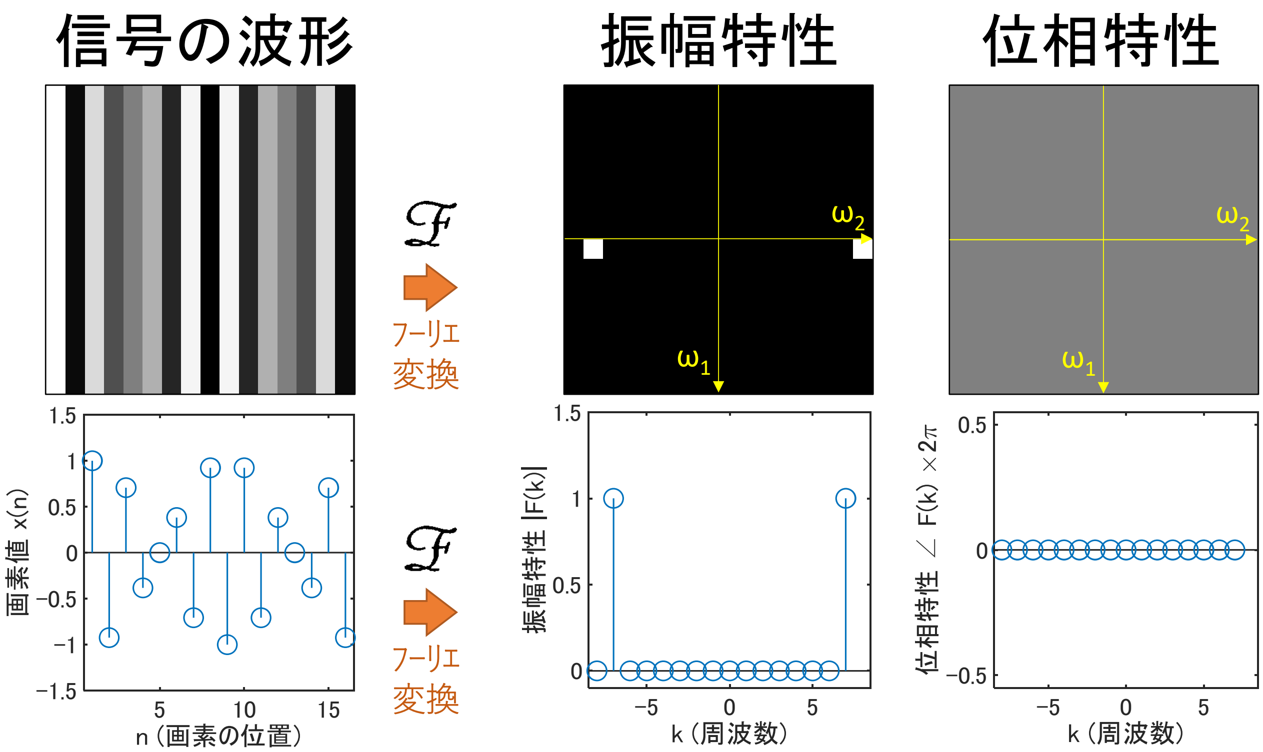
信号の波形　　振幅特性　　位相特性



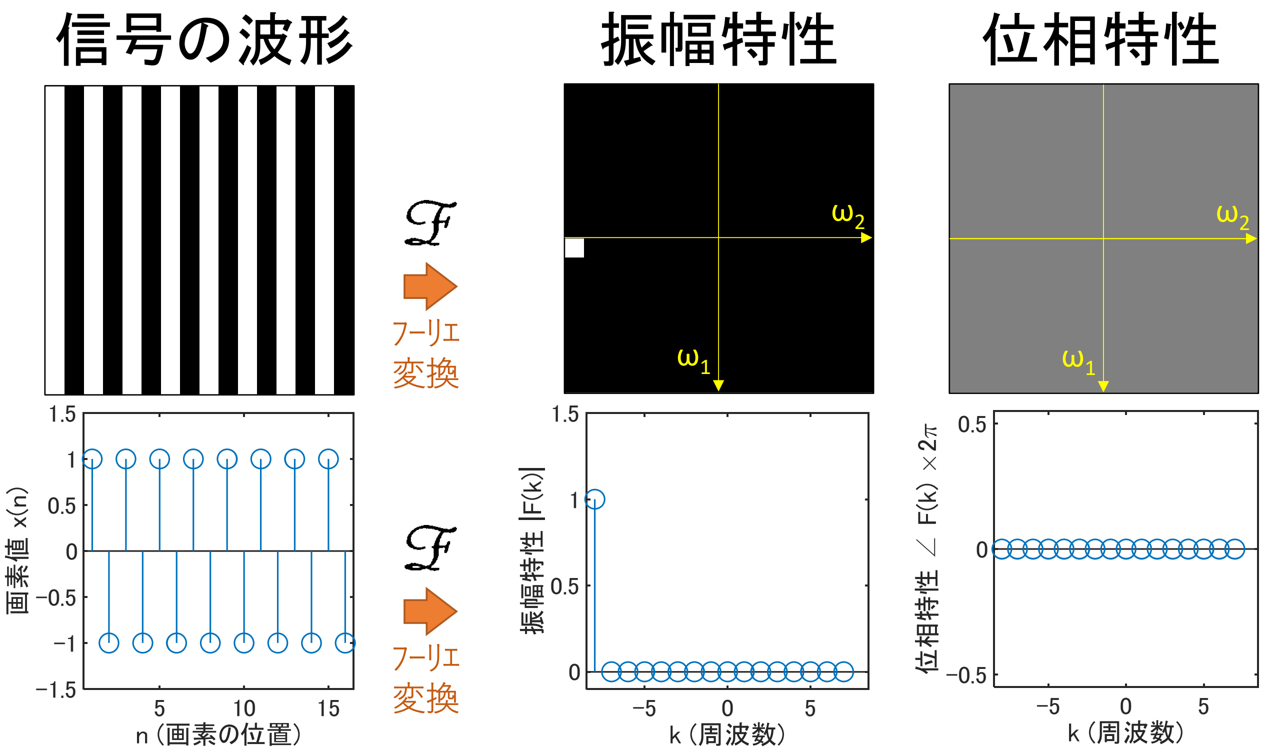
4.1 フーリエ変換、　縦縞の模様



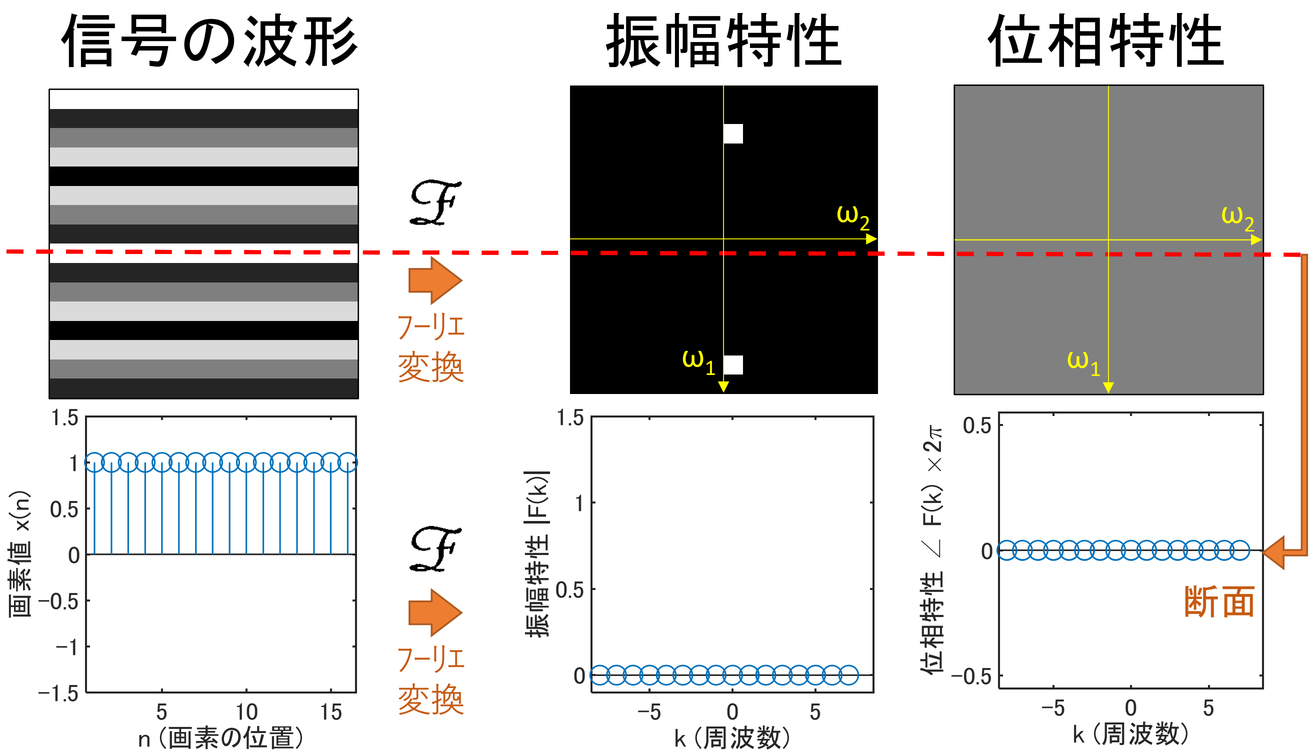
4.1 フーリエ変換、細かい縞模様



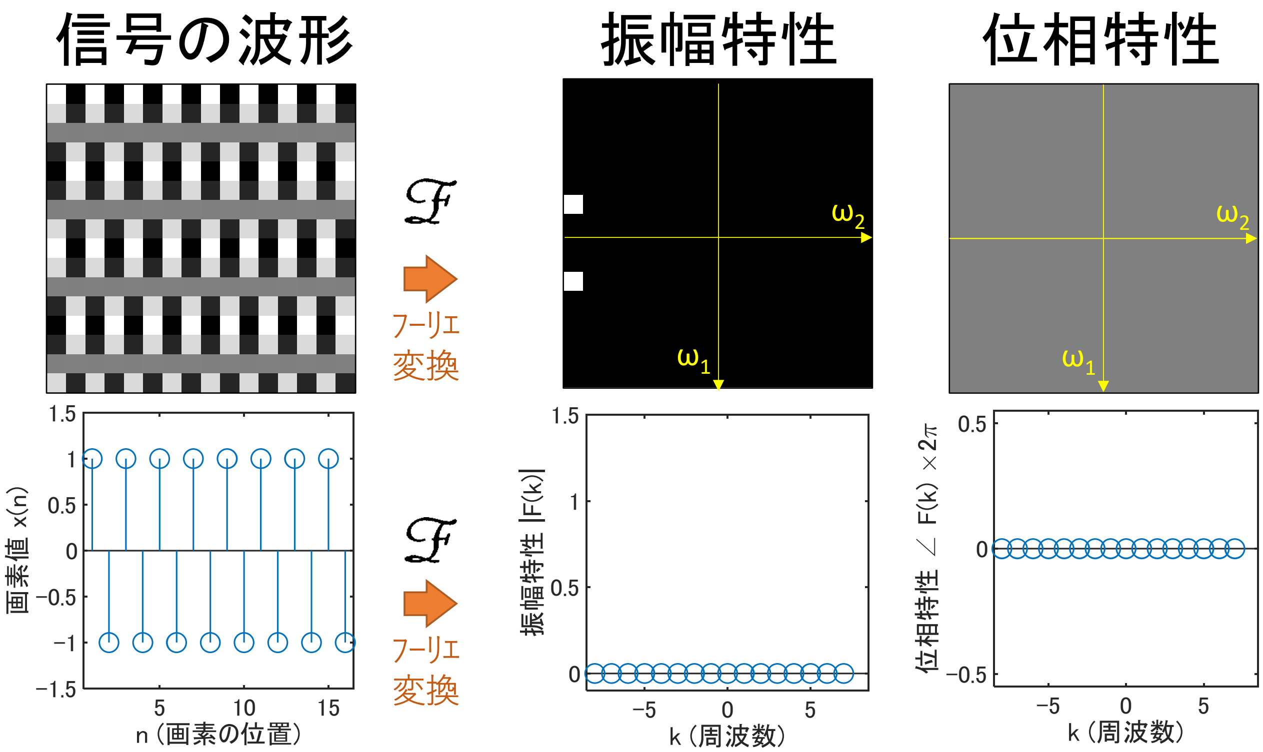
4.1 フーリエ変換、 最も細かい模様



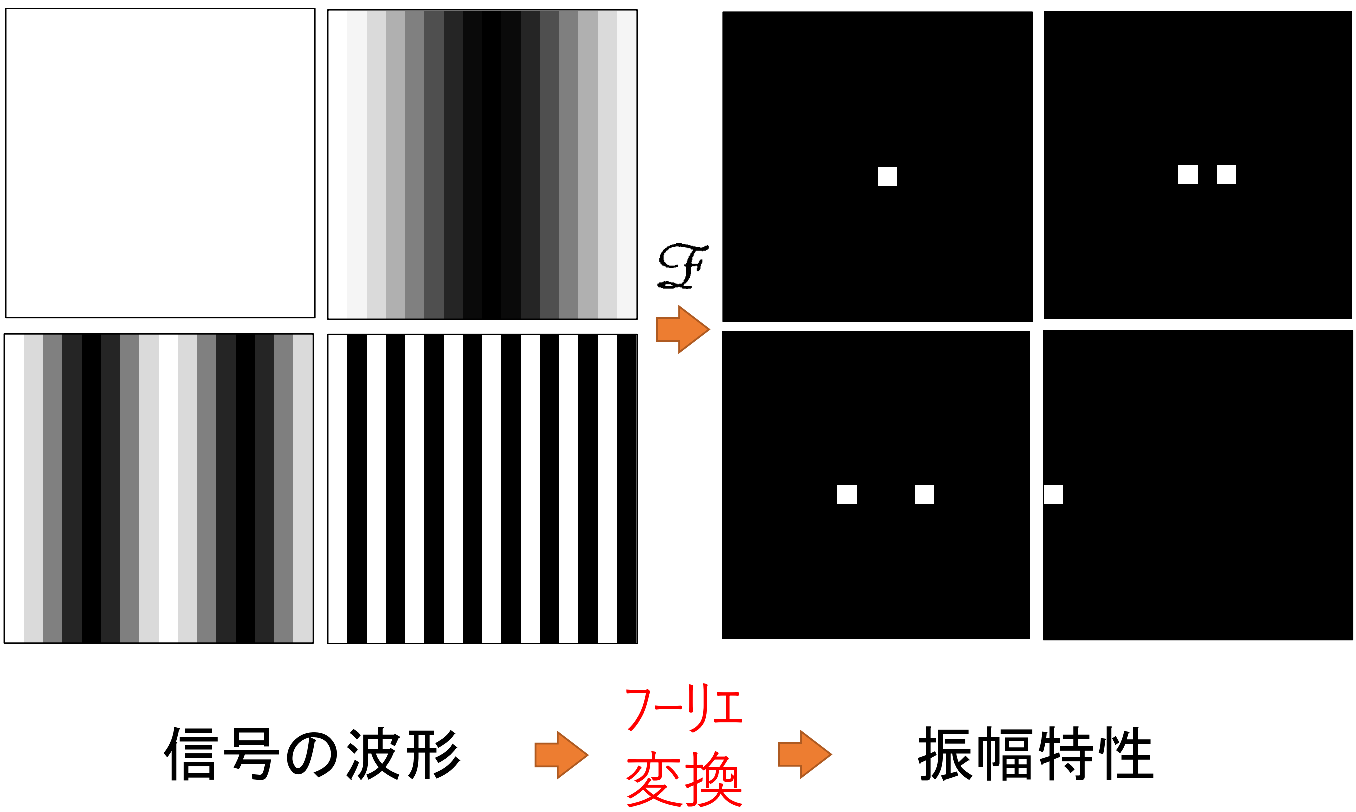
4.1 フーリエ変換、 横縞の模様

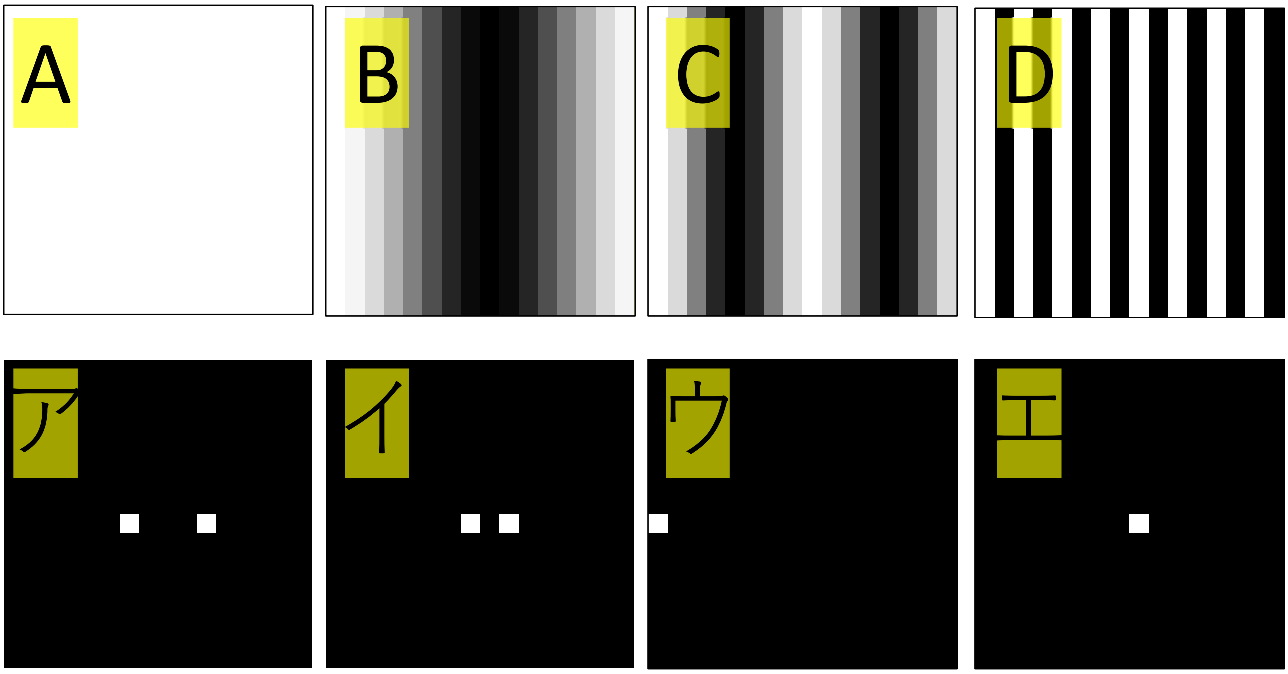


4.1 フーリエ変換、縦横の模様



振幅特性と模様の細かさ（まとめ）





4．周波数解析の方法

4.1 フーリエ変換　（振幅特性と模様の細かさ）

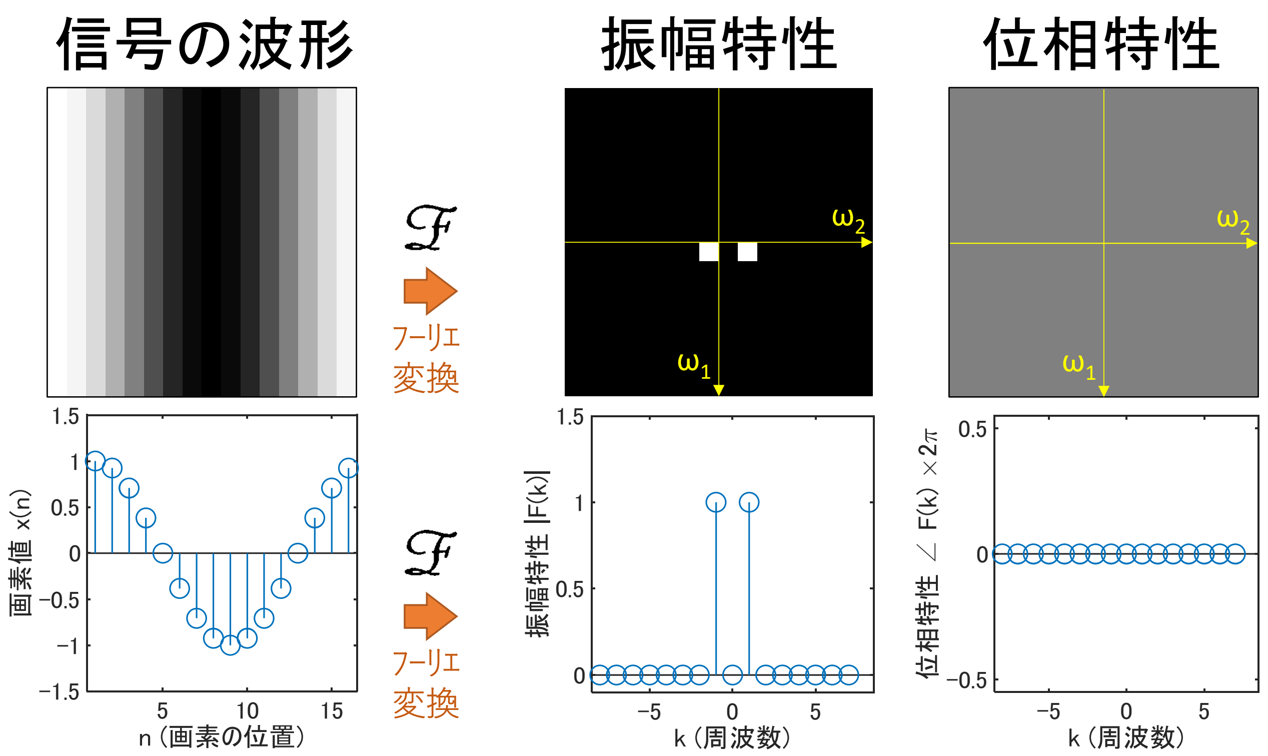
4.2 フーリエ変換　（位相特性と模様の位置）

2Dの例

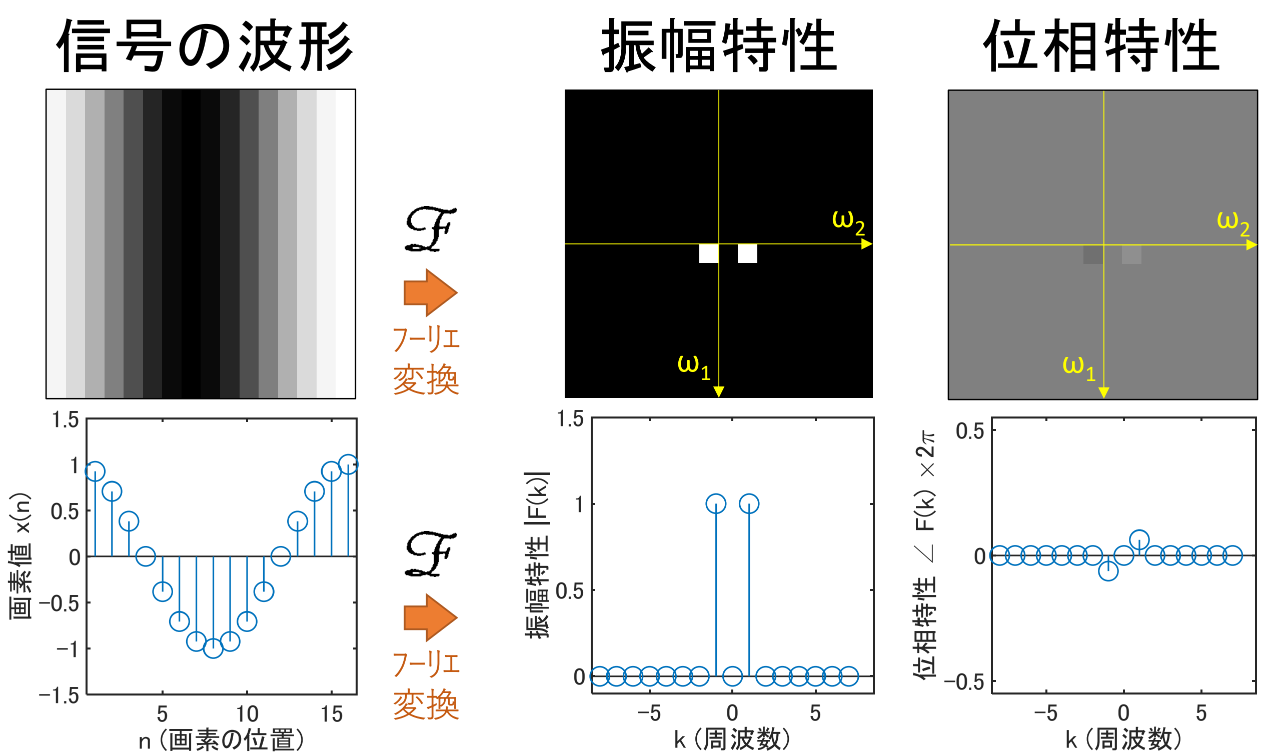
4.3 フィルタの周波数特性

4.4 フーリエ変換の数理

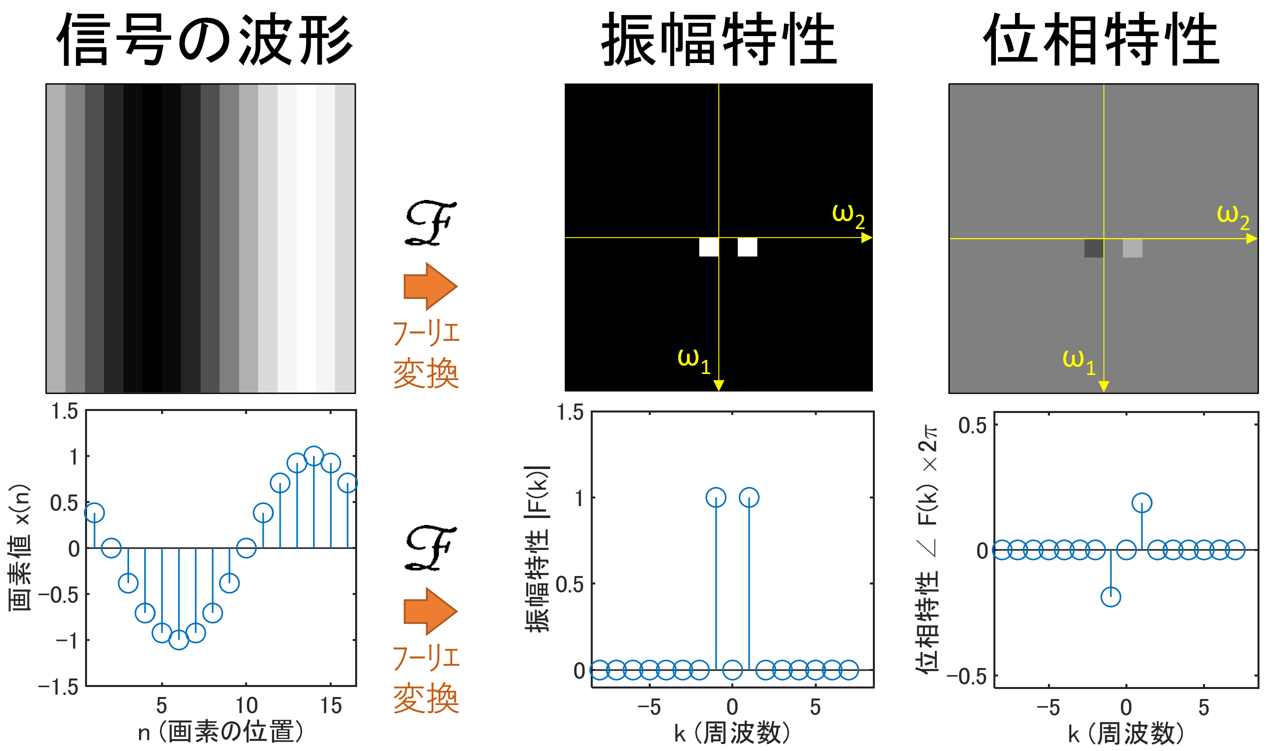
4.2 フーリエ変換、（シフトする前）



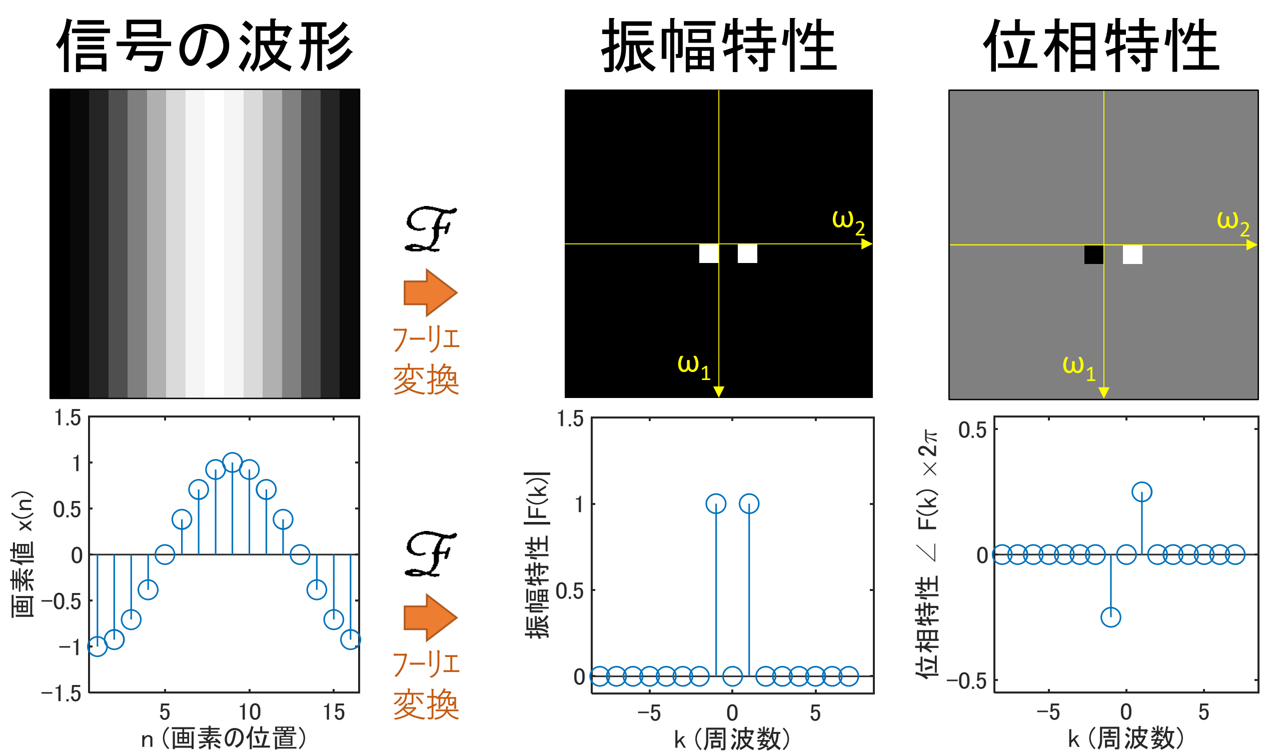
4.2 フーリエ変換、左へ１画素シフト



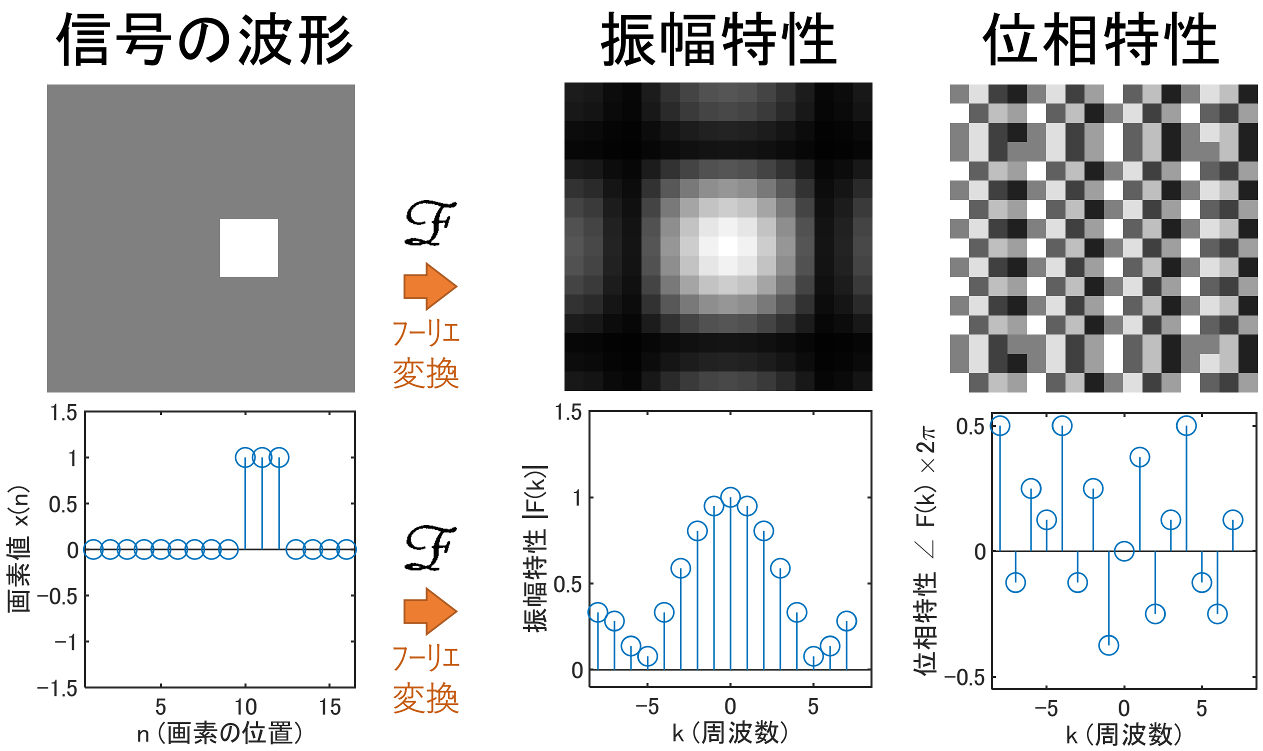
4.2 フーリエ変換、左へ3画素シフト



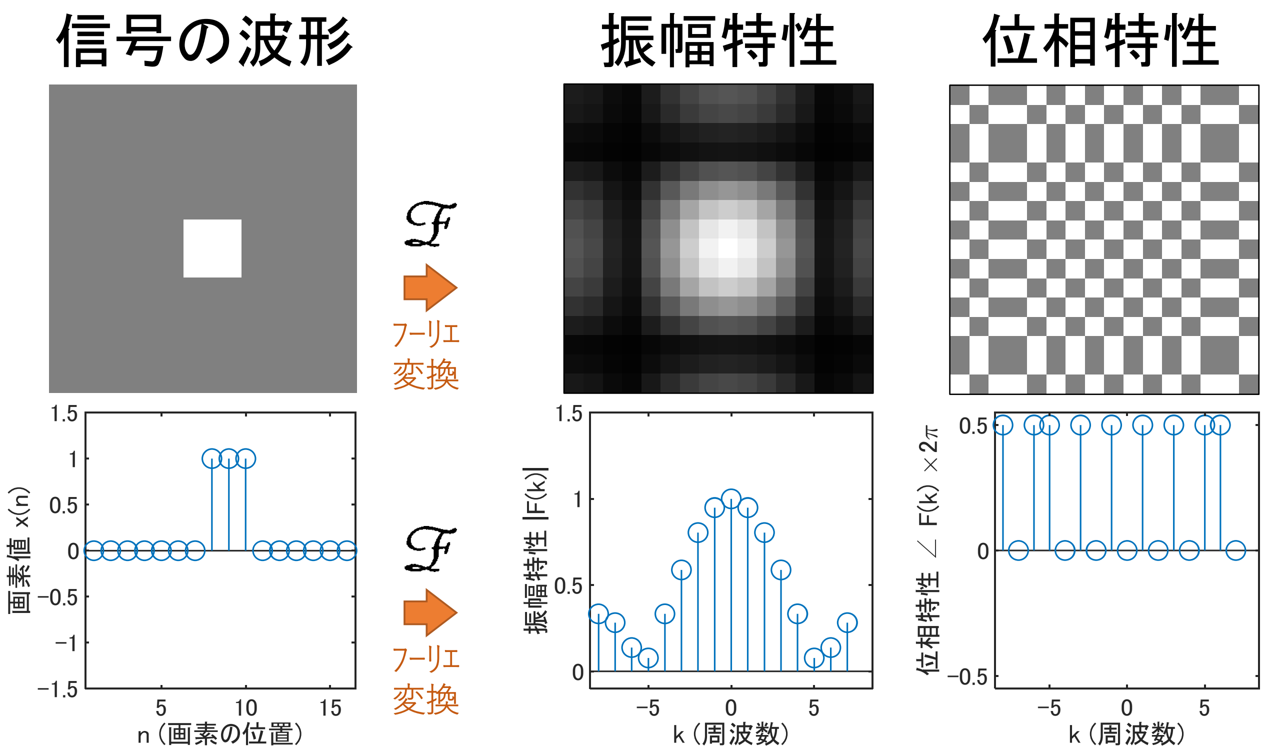
4.2 フーリエ変換、正負が反転（8画素シフト）



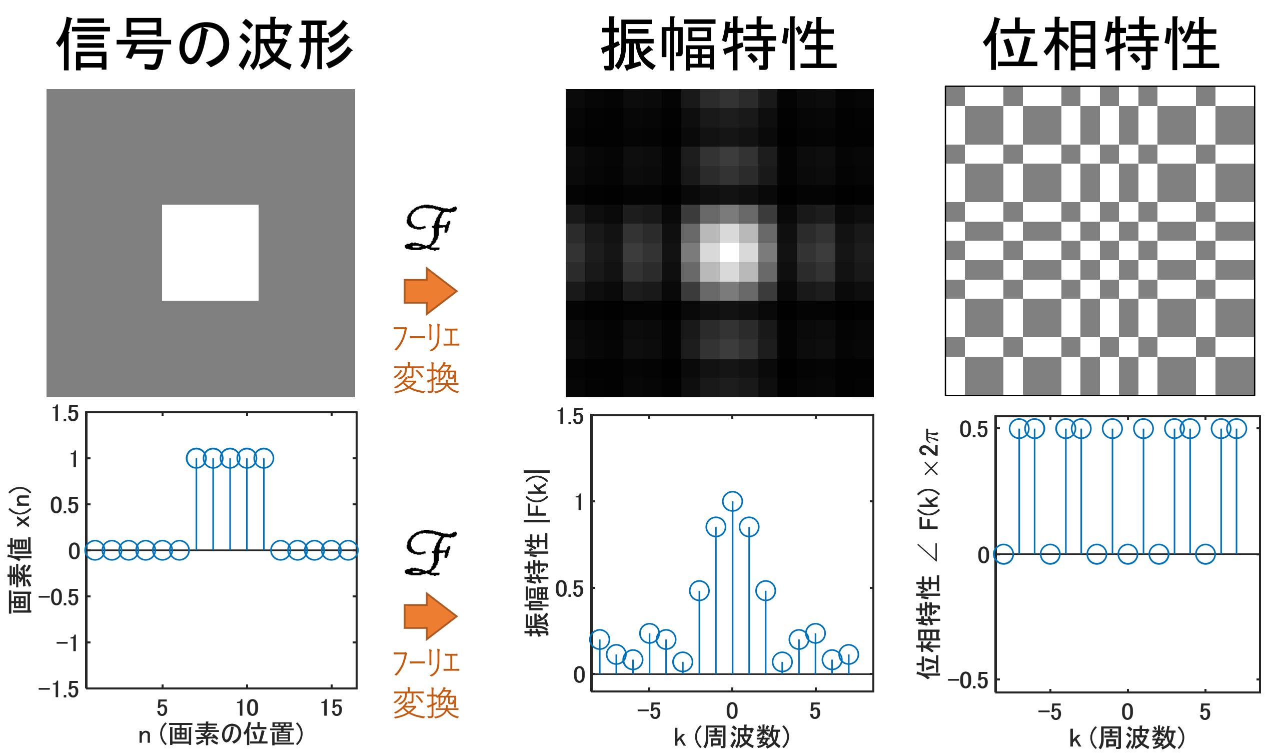
4.2 フーリエ変換、点の位置と位相特性 1/2



4.2 フーリエ変換、点の位置と位相特性 2/2



4.2 フーリエ変換、点の大きさと振幅特性



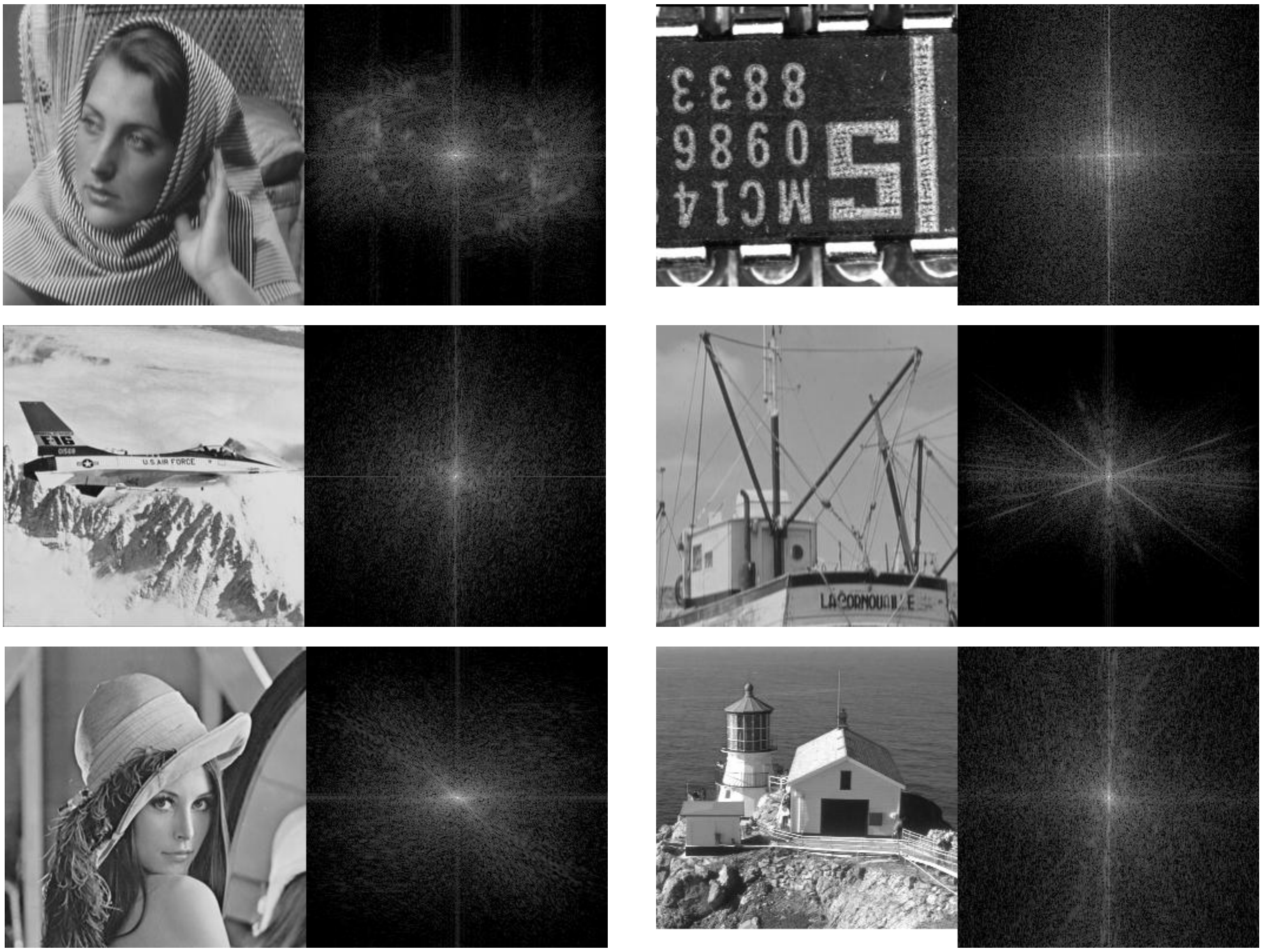
4．周波数解析の方法

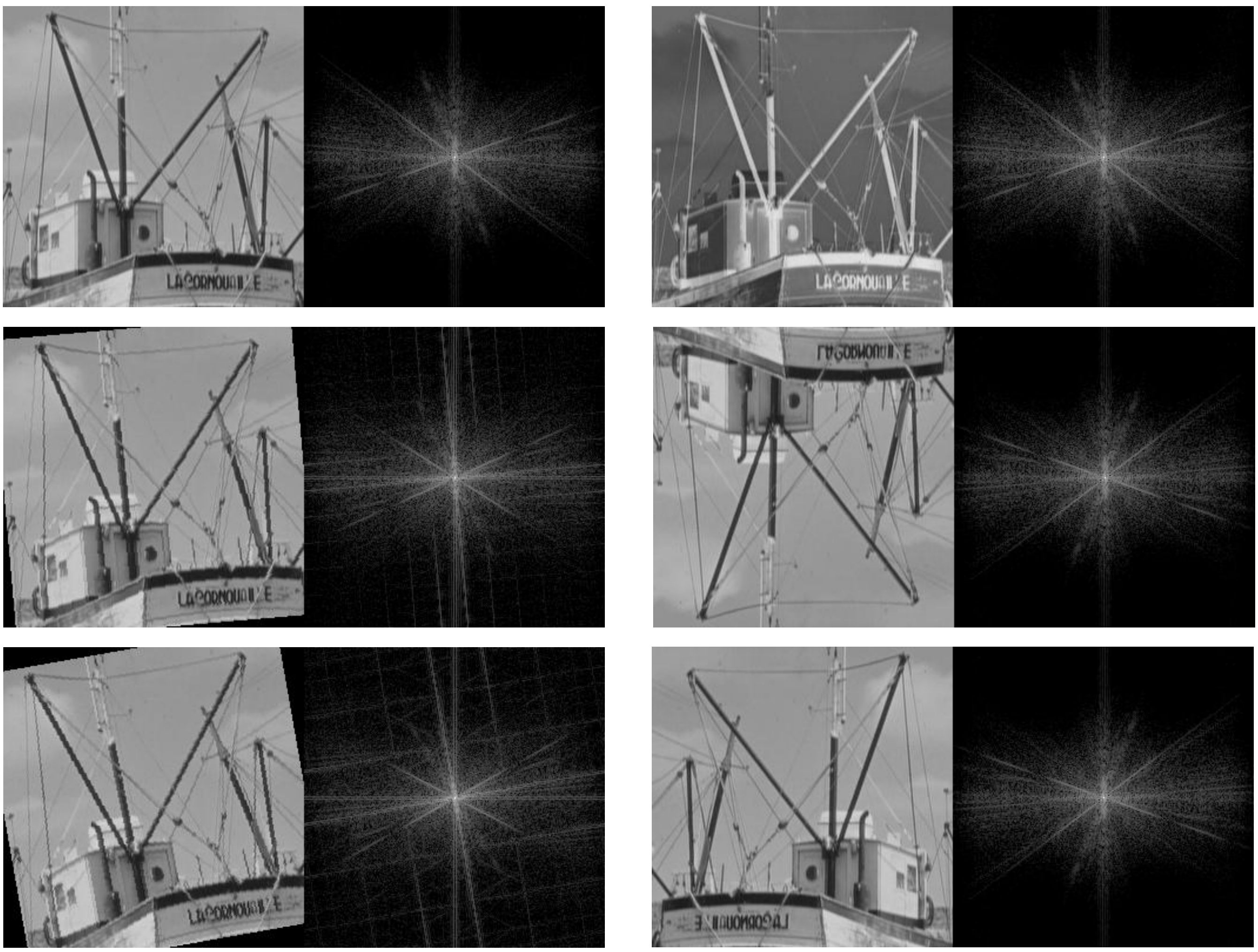
4.1 フーリエ変換　（振幅特性と模様の細かさ）

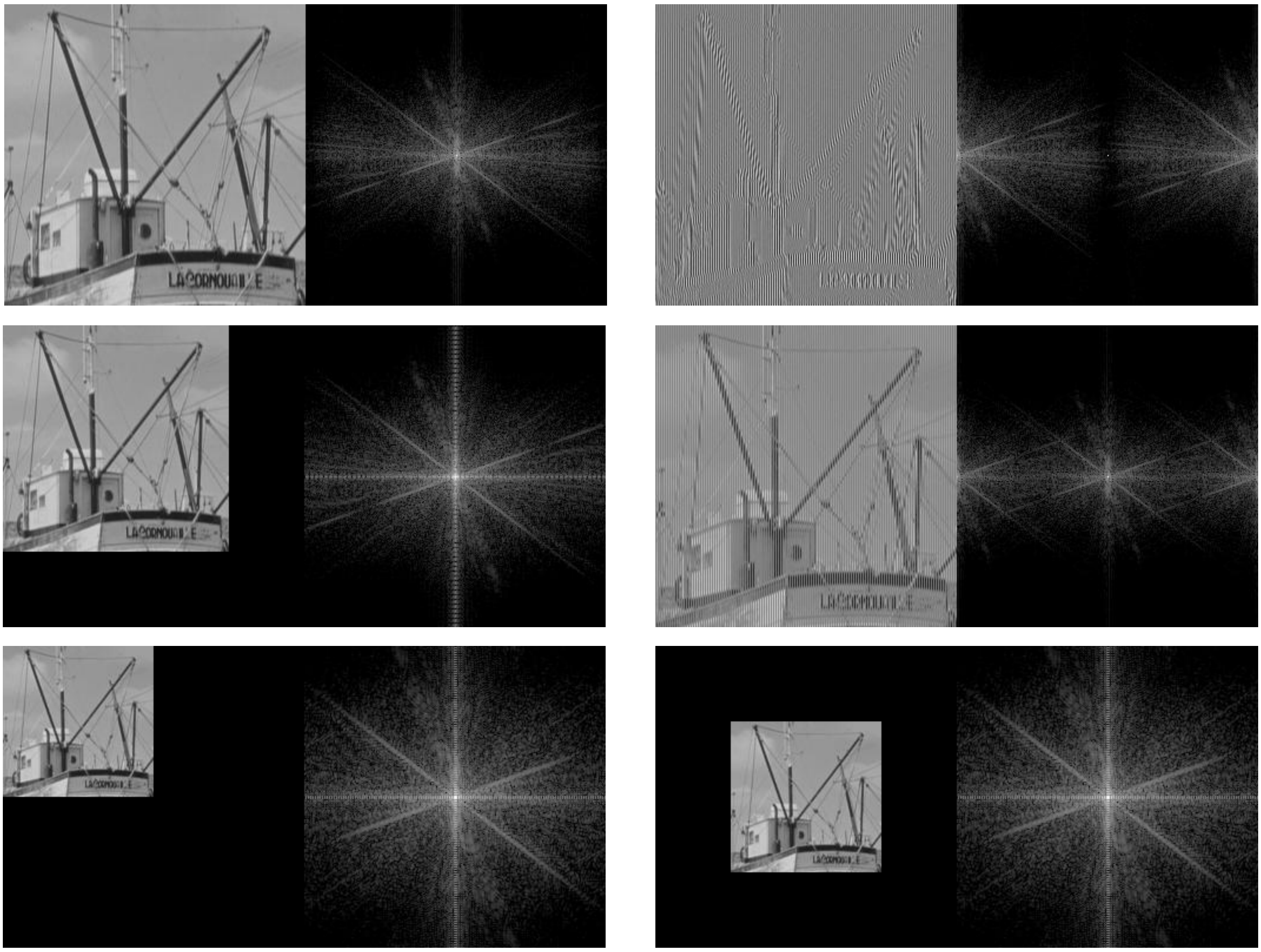
4.2 フーリエ変換　（位相特性と模様の位置）

4.3 フィルタの周波数特性（入力画像の周波数特性）

4.4 フーリエ変換の数理







MATLAB program

```
x =imread('image.jpg');  % 画像を読み込む
x =double(x)/255;        % 画素値を 0~1 に正規化
y =fft2(x);              % 2次元のフーリエ変換
y =abs(y);               % 周波数振幅特性
y =y./max(y(:));         % 最大を 1 に正規化
y =20*log10(y);          % 対数で表示
Ep=-80; y(y<Ep)=Ep;      % 最大0、最小-80 [dB]
y =(Ep-y)/Ep;            % 最大1、最小0に正規化

y =fftshift(y);
imshow( [x y],'Border','tight');% 結果を表示
```

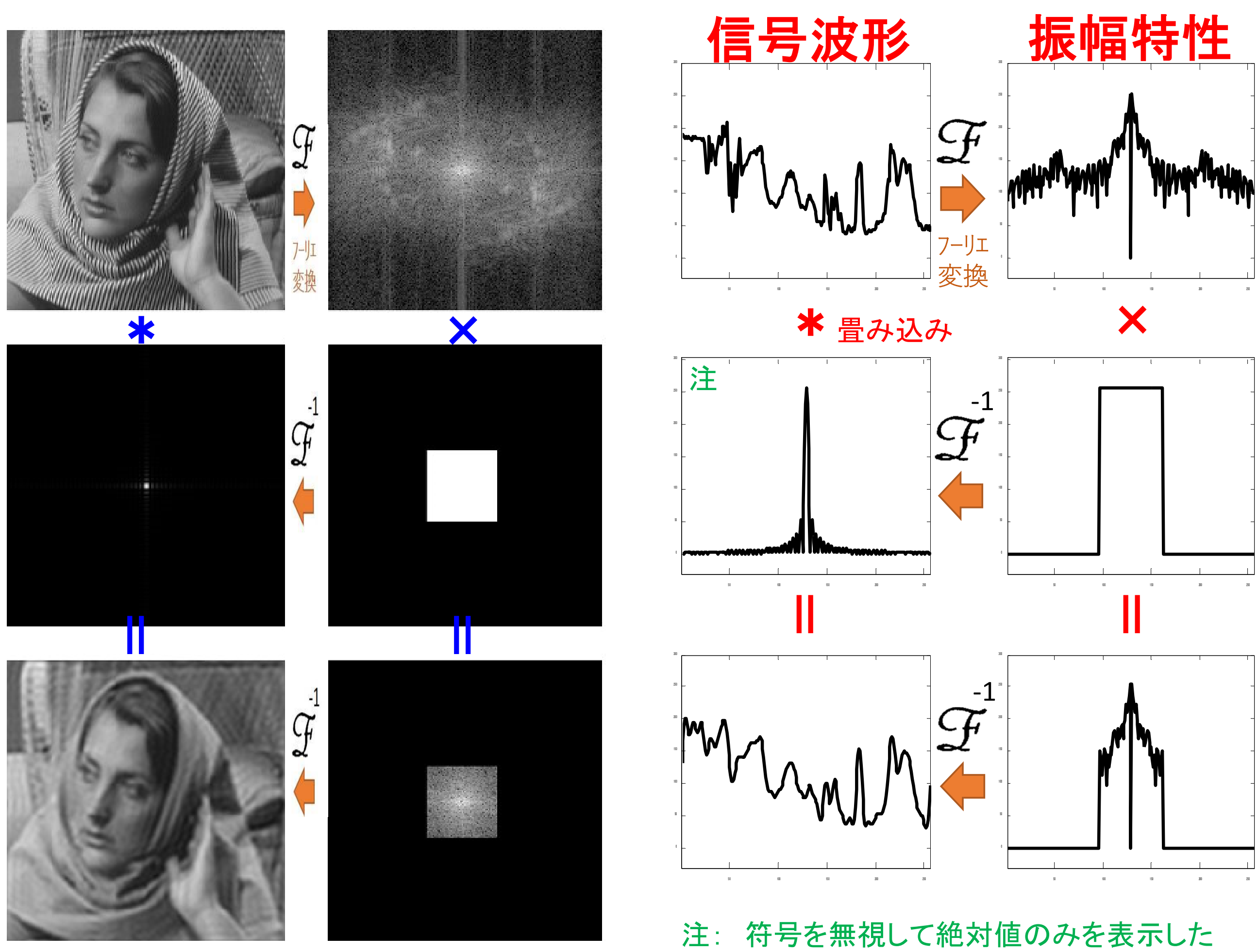
4．周波数解析の方法

4.1 フーリエ変換　（振幅特性と模様の細かさ）

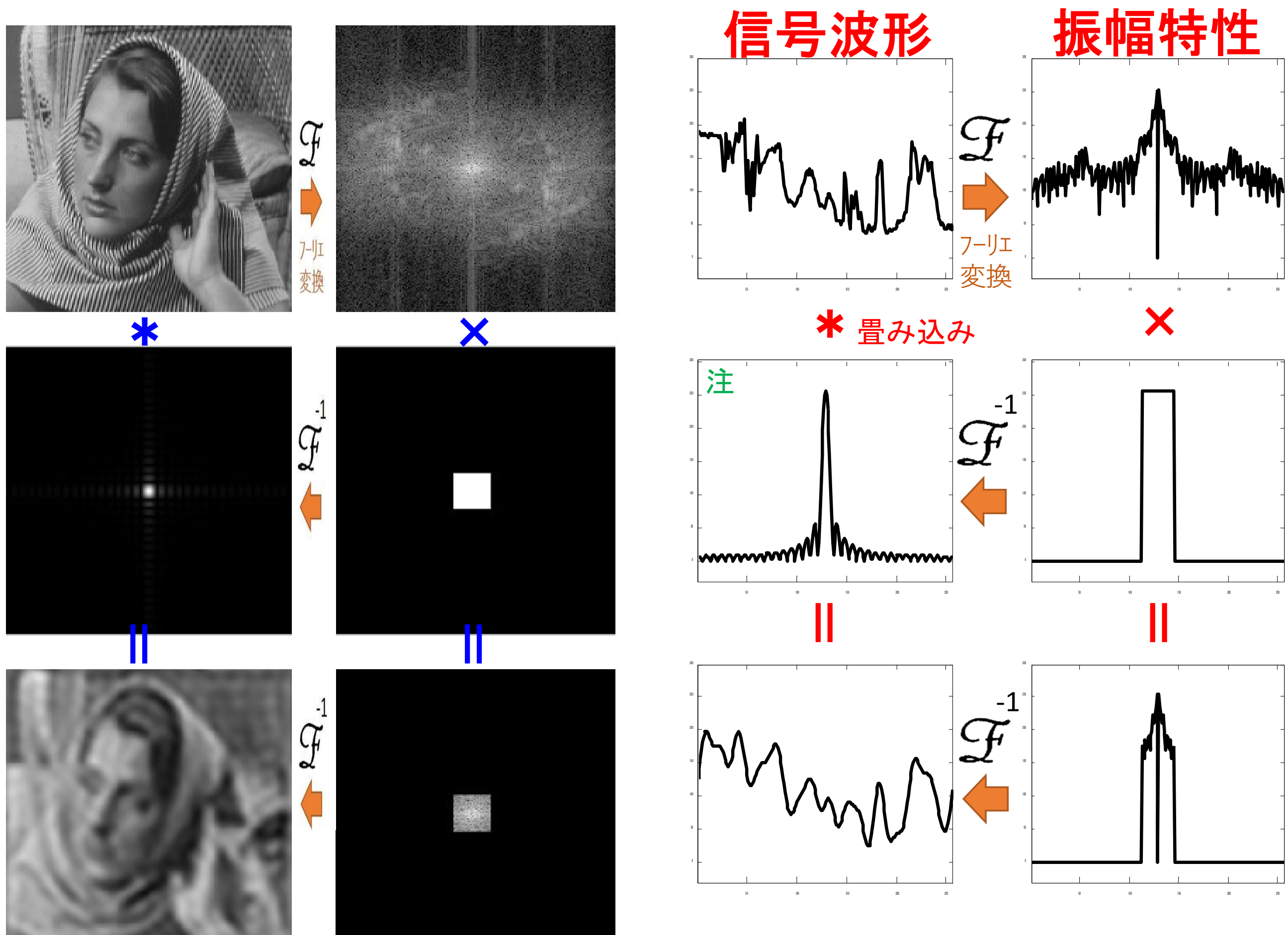
4.2 フーリエ変換　（位相特性と模様の位置）

4.3 フィルタの周波数特性（FFTによるﾌｨﾙﾀ処理）

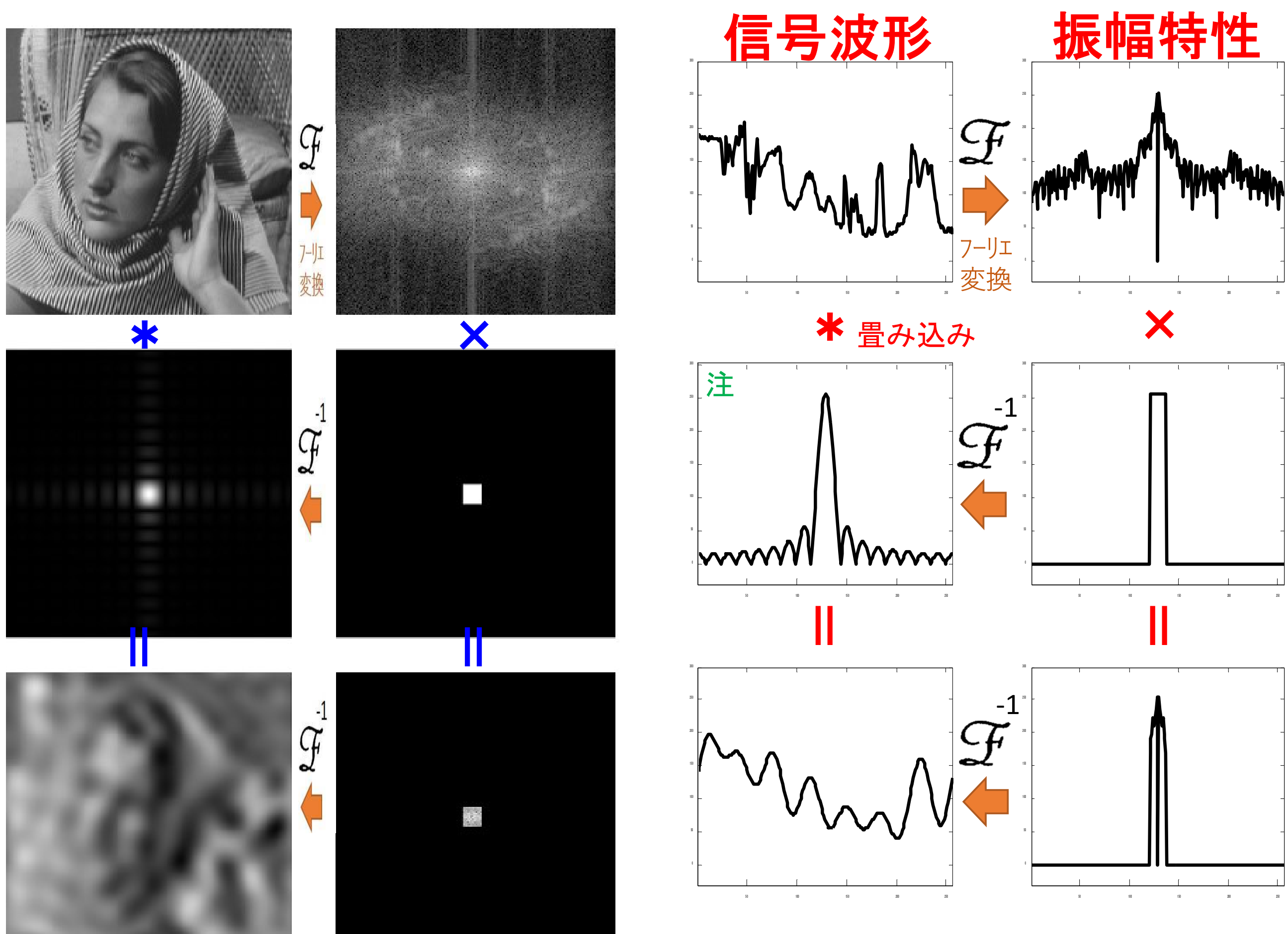
4.4 フーリエ変換の数理



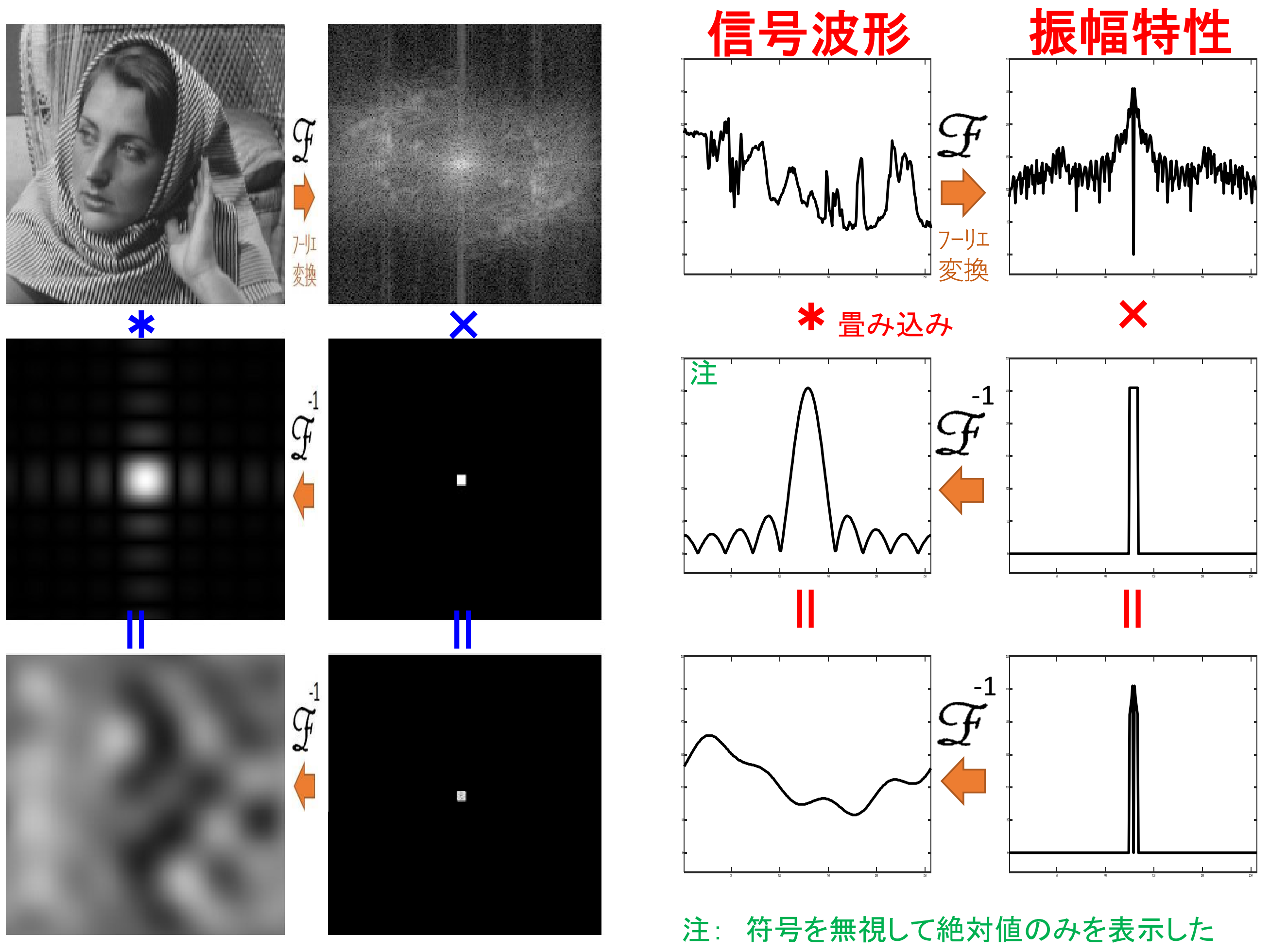
注：　符号を無視して絶対値のみを表示した



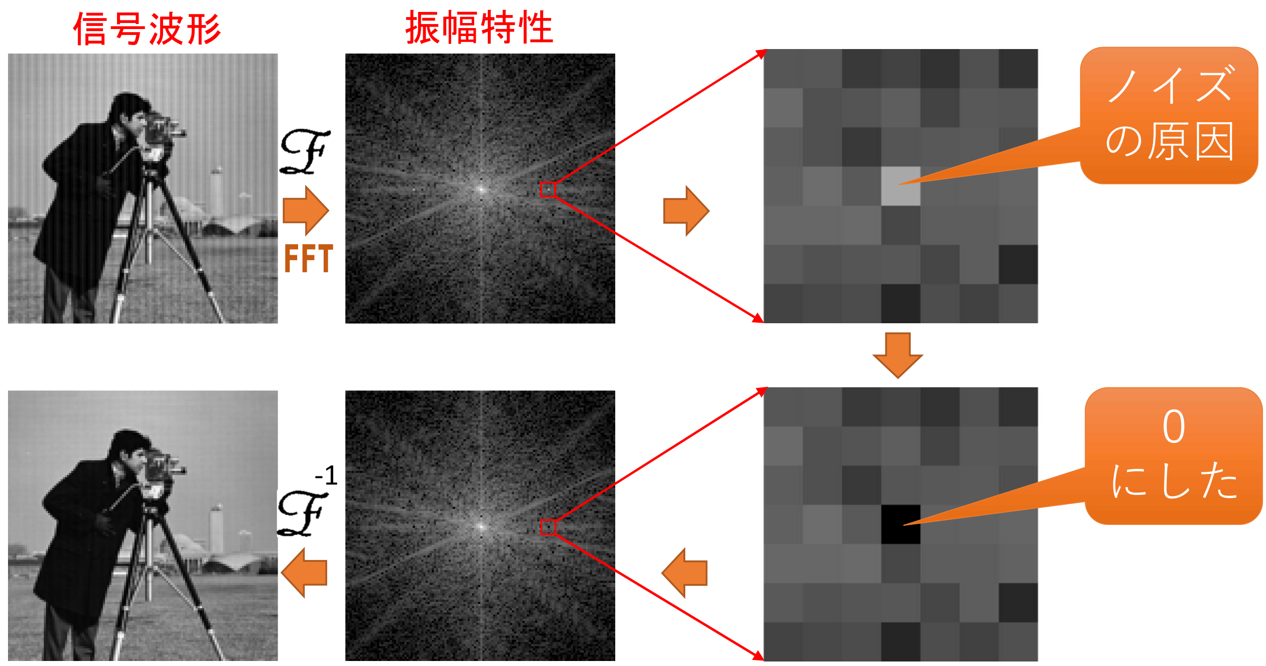
注：　符号を無視して絶対値のみを表示した



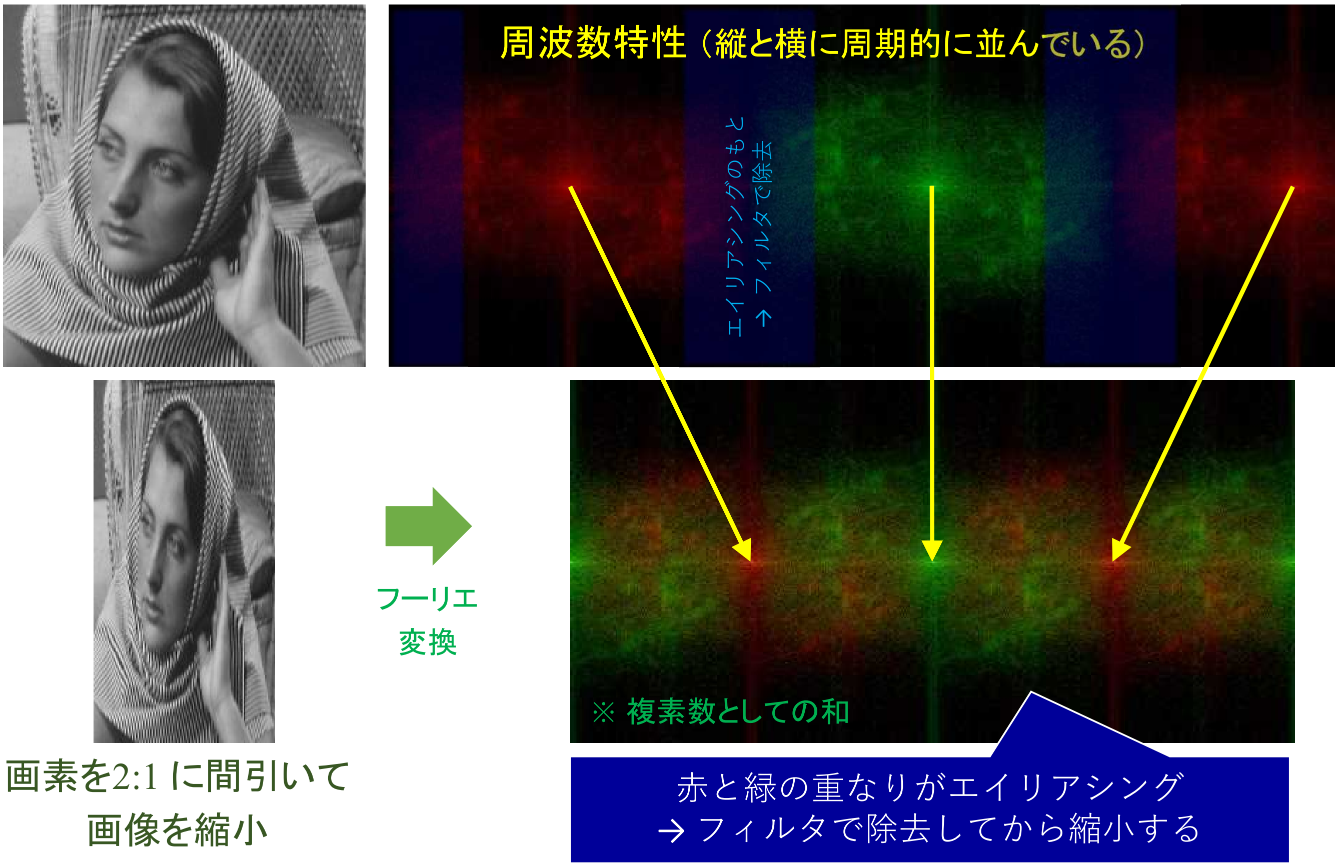
注：　符号を無視して絶対値のみを表示した



FFT によるノイズの除去

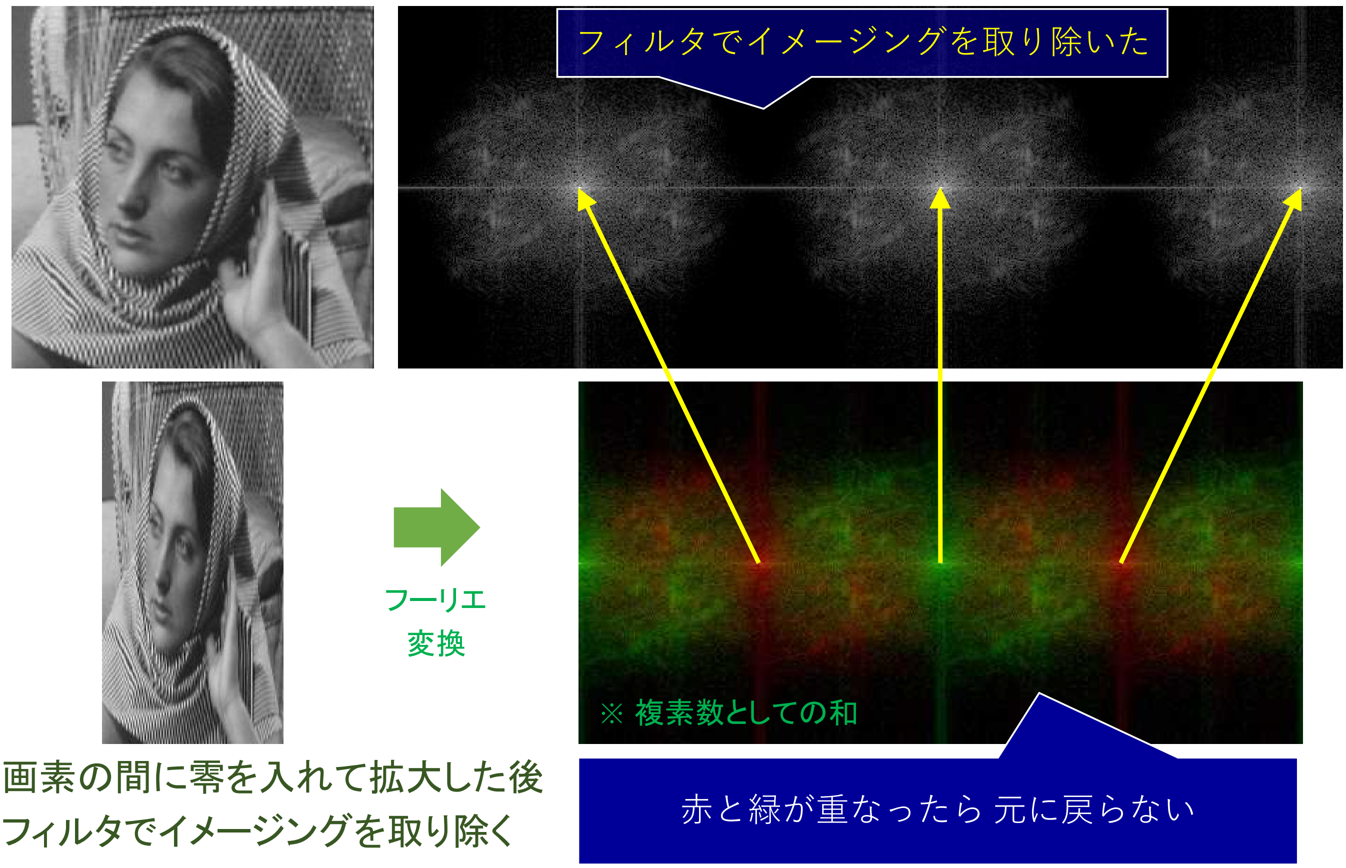


画像の縮小とエイリアシング



画素を2:1 に間引いて
画像を縮小

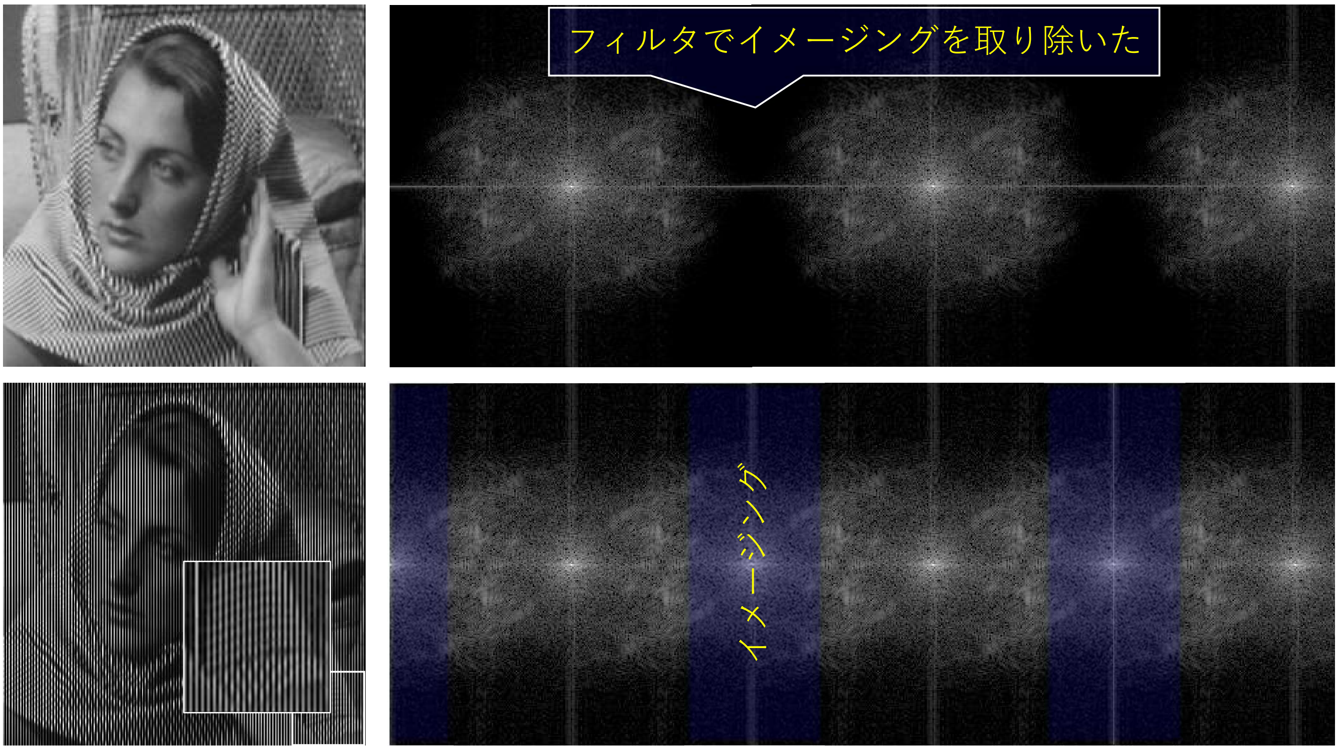
画像の拡大とイメージング



画素の間に零を入れて拡大した後
フィルタでイメージングを取り除く

補足

画像の拡大とイメージング



画素の間に零を入れて
拡大した画像

$$H(z) = [\mathbf{0.5} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0.5}][z \quad 1 \quad z^{-1}]^T$$

4．周波数解析の方法

4.1 フーリエ変換　（振幅特性と模様の細かさ）

4.2 フーリエ変換　（位相特性と模様の位置）

4.3 フィルタの周波数特性（畳み込みによるﾌｨﾙﾀ処理）

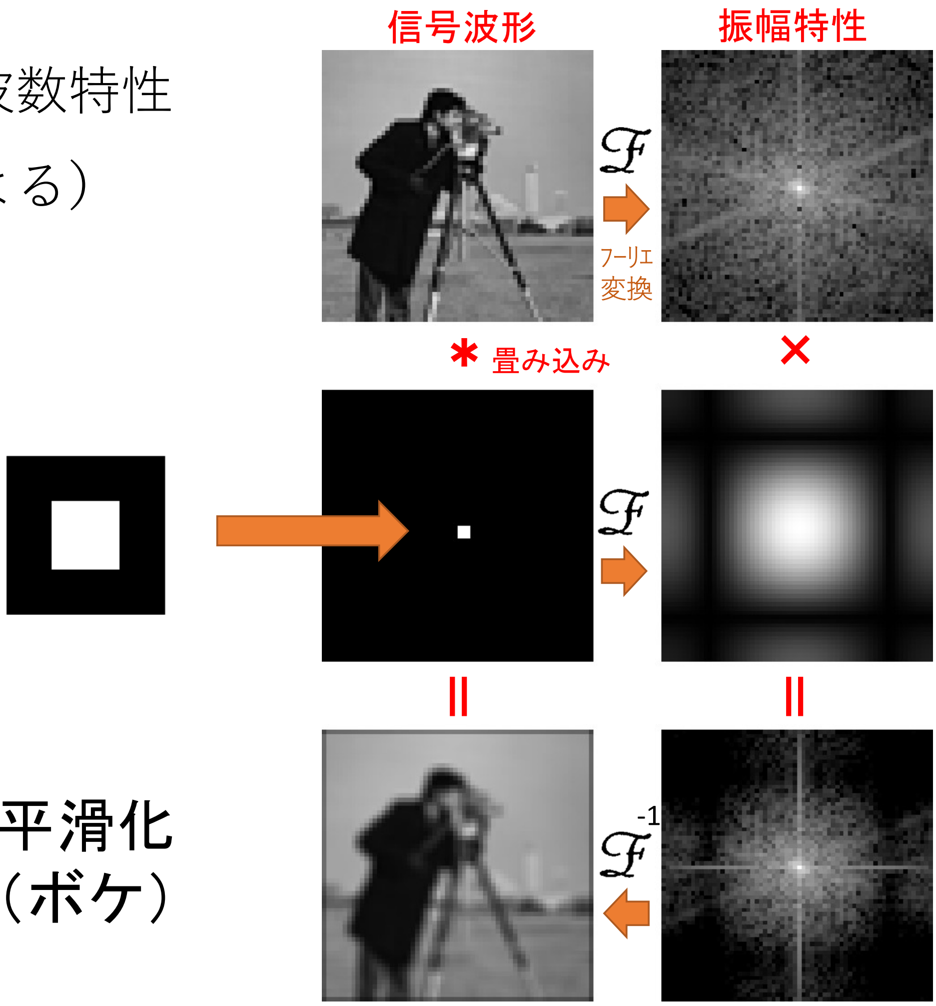
4.4 フーリエ変換の数理

フィルタの周波数特性

（畳み込みによる）

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

フィルタ係数



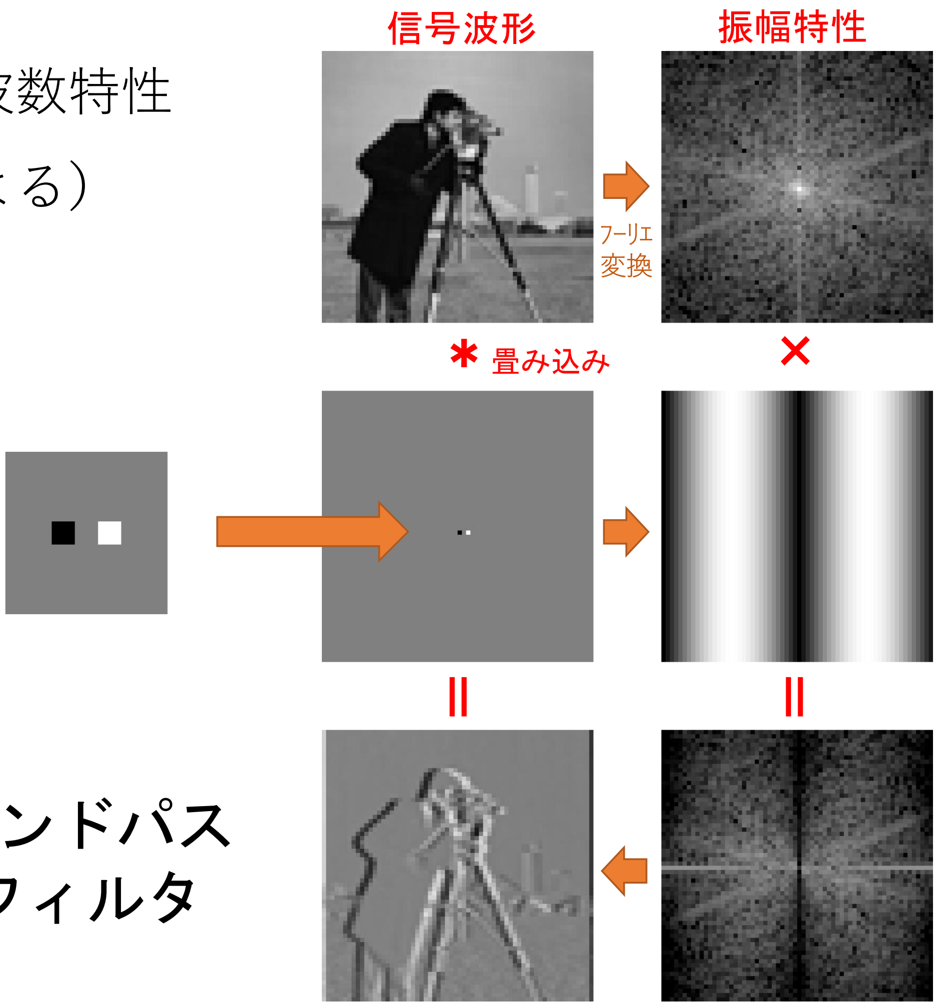
平滑化（ボケ）

フィルタの周波数特性

（畳み込みによる）

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

フィルタ係数
(横の微分)



バンドパスフィルタ

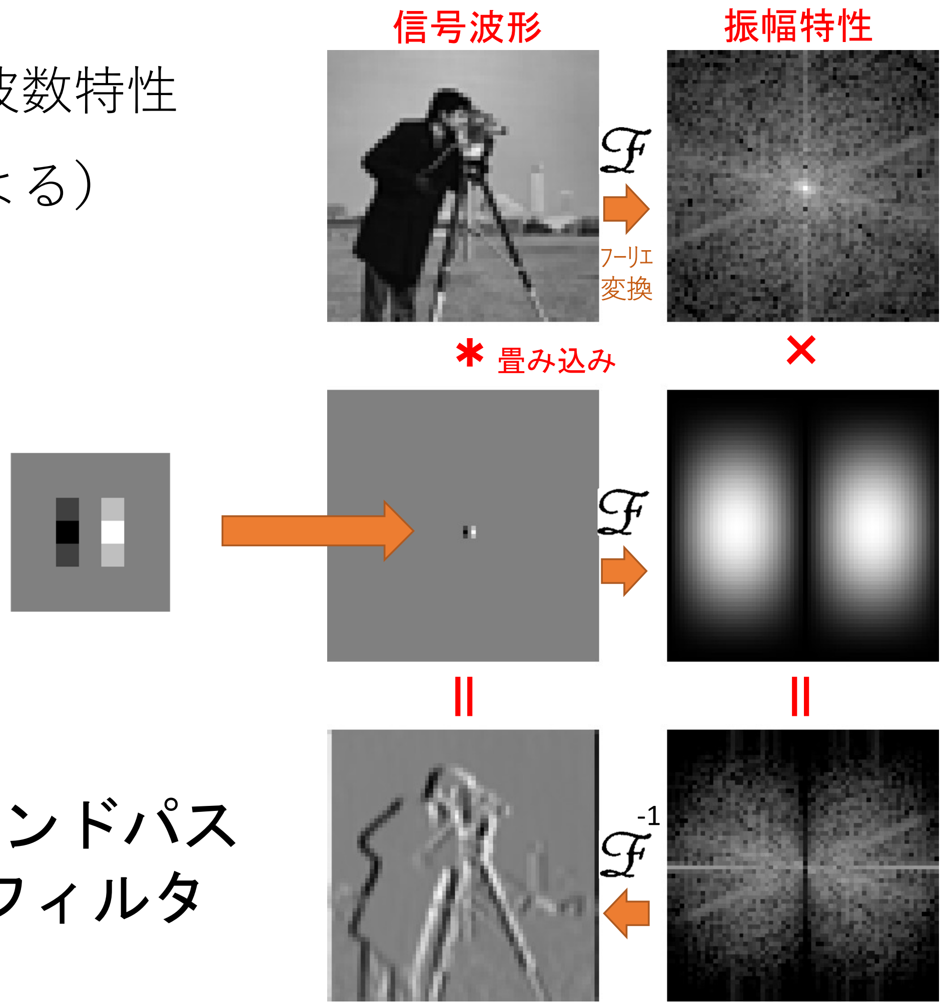
フィルタの周波数特性

（畳み込みによる）

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

フィルタ係数

(Sobel filter)



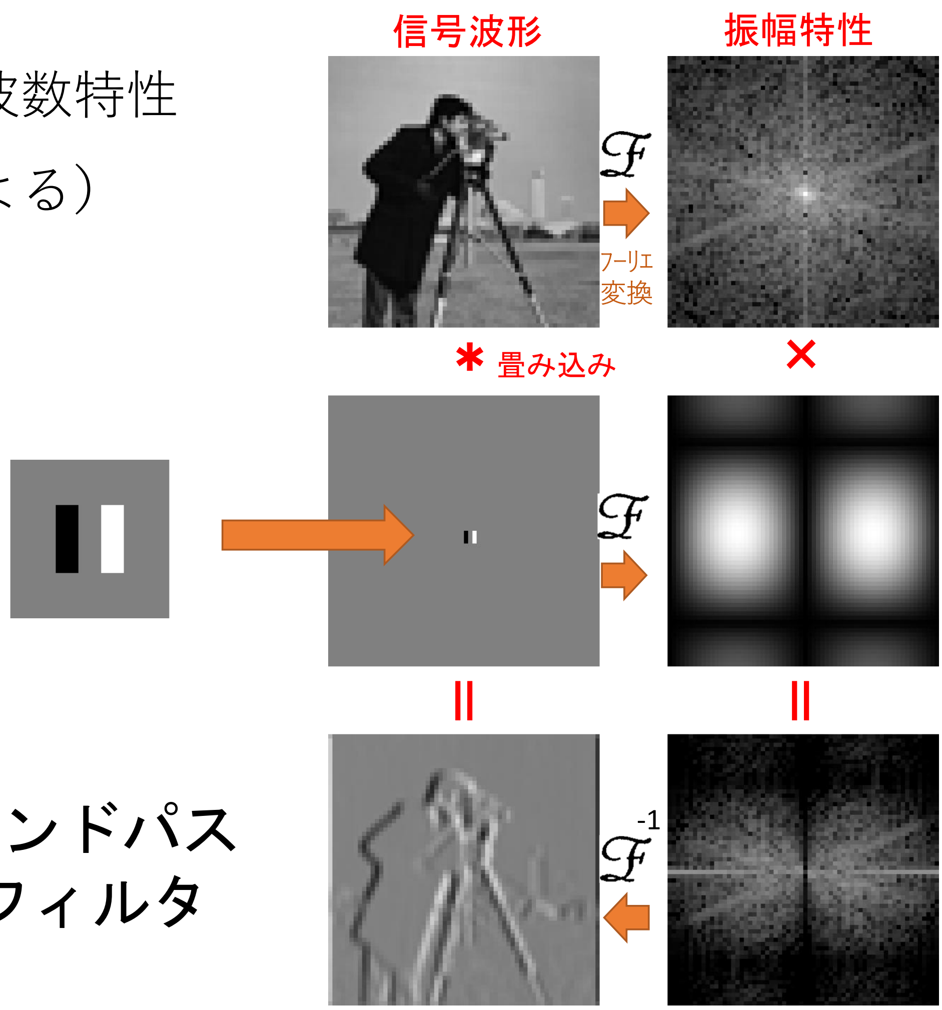
フィルタの周波数特性

（畳み込みによる）

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

フィルタ係数

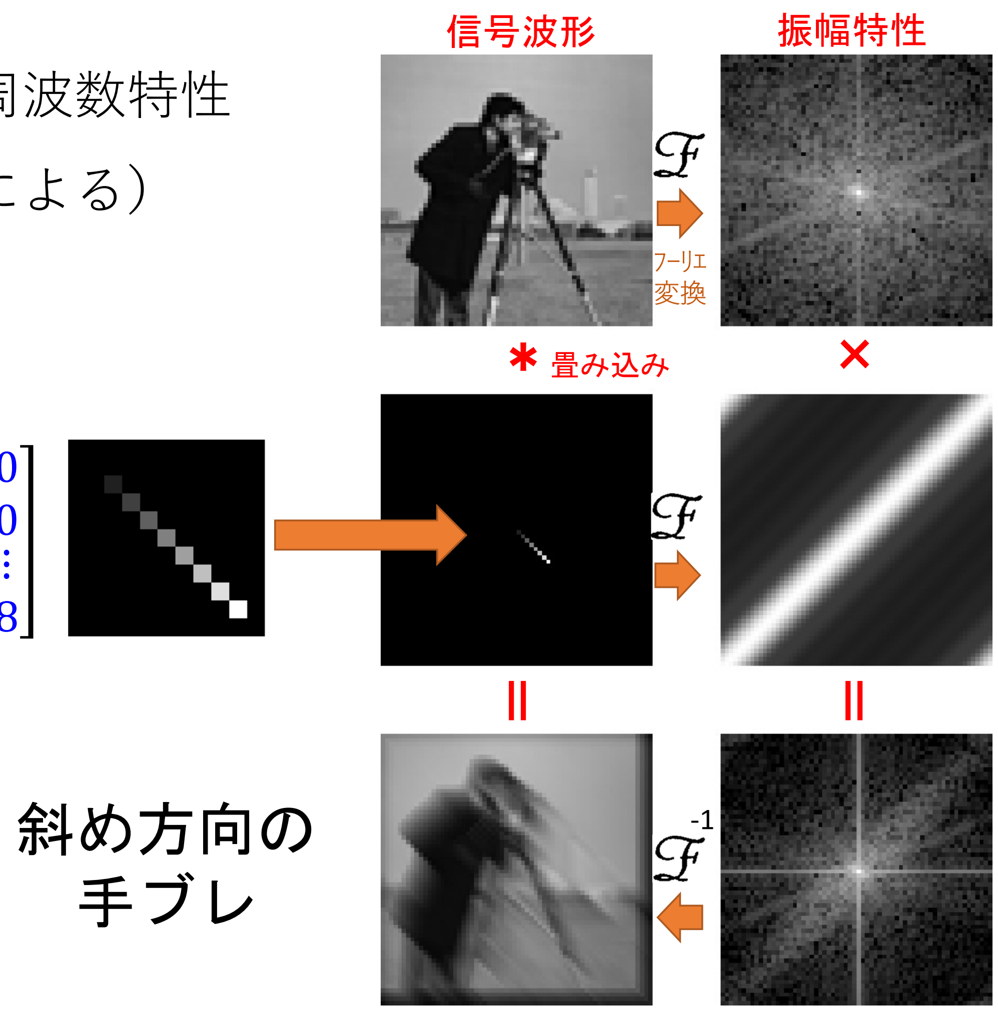
(Prewitt filter)



フィルタの周波数特性
（畳み込みによる）

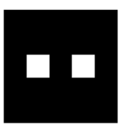
$$\frac{1}{36}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 8 \end{bmatrix}$$

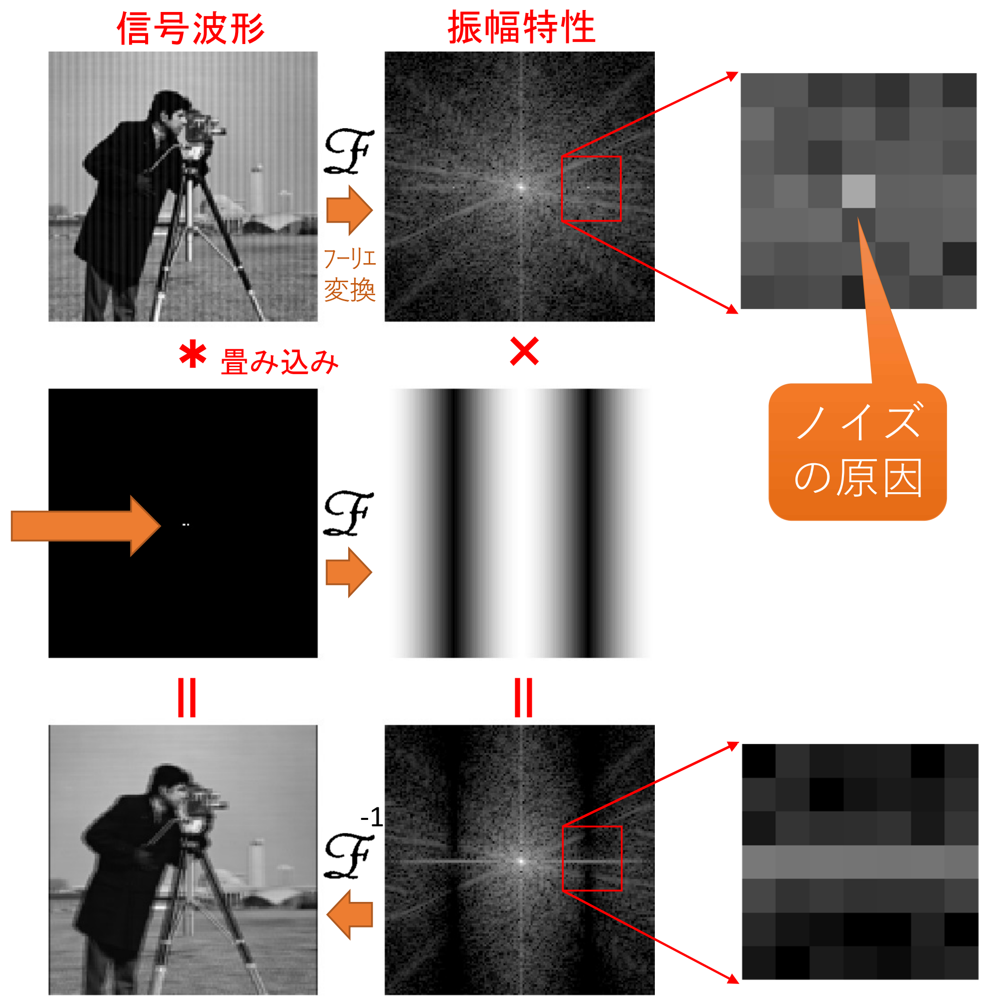
フィルタ係数



フィルタ係数

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





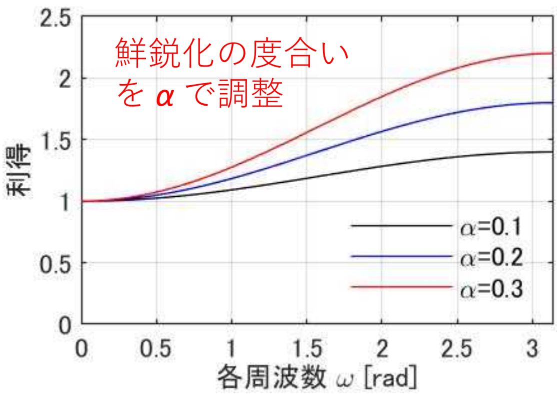
ノイズ
の除去

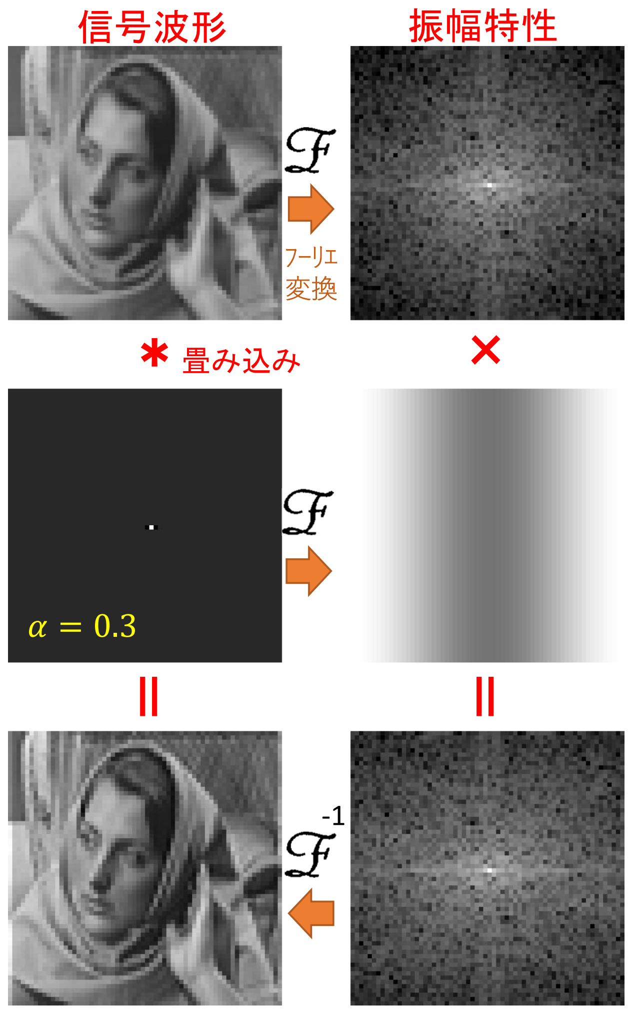
フィルタの設計

$$H(z) = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{1+2}\boldsymbol{\alpha} & -\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix}$$

フィルタ係数

$$H\left(e^{j\omega}\right) = 1 + 2\alpha - 2\alpha\cos\omega$$





4．周波数解析の方法

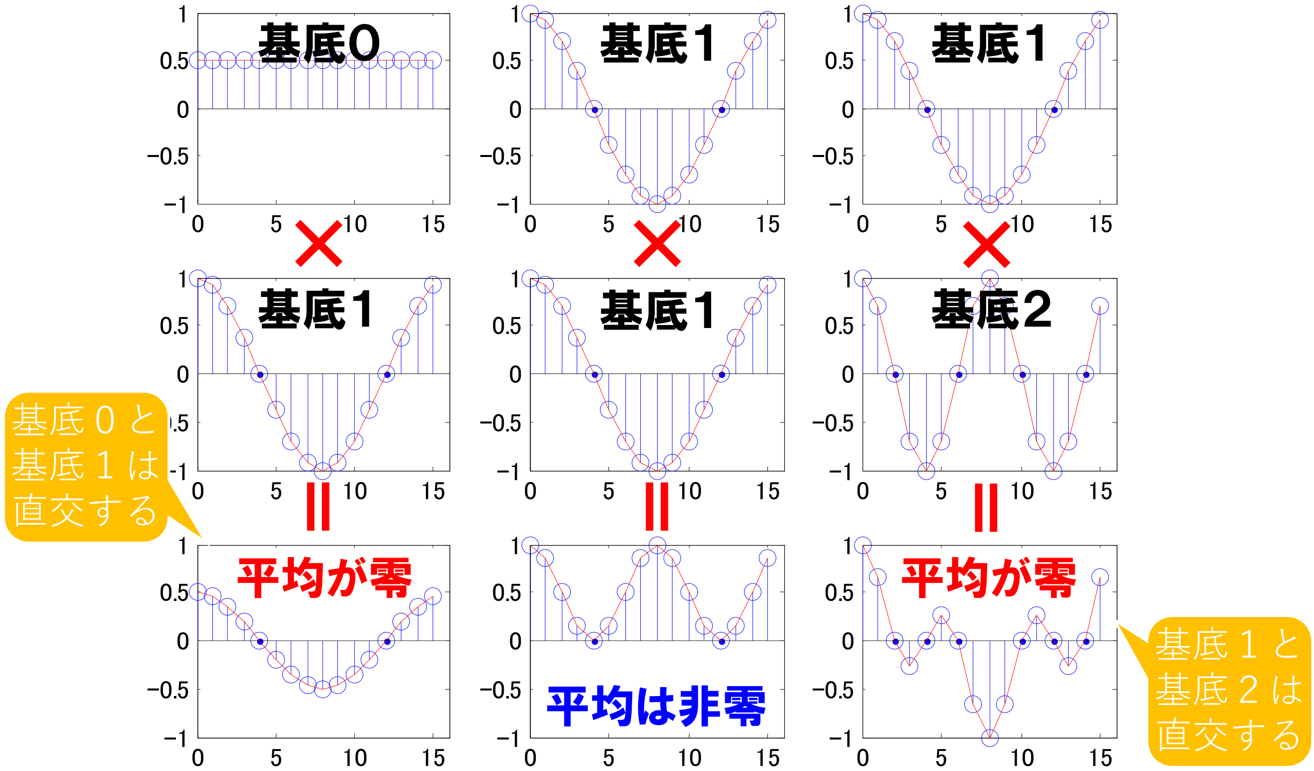
4.1 フーリエ変換　（振幅特性と模様の細かさ）

4.2 フーリエ変換　（位相特性と模様の位置）

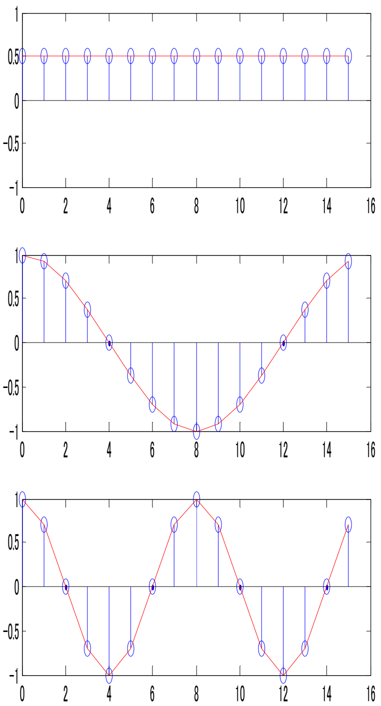
4.3 フィルタの周波数特性

4.4 フーリエ変換の数理

「基底が直交する」とは？　1/2



「基底が直交する」とは？　2/2



基底の積の平均

	基底 0	基底 1	基底 2
基底 0	平均は非零	平均が零	平均が零
基底 1	平均が零	平均は非零	平均が零
基底 2	平均が零	平均が零	平均は非零

スペクトルとは？

周波数成分

前提

信号 ＝ 大きさ0×基底0
＋ 大きさ1×基底1

目的

大きさ0 と 大きさ1 を知る

性質

基底0 と 基底1 は 直交する

直交基底の性質

記号（a, b）を、a と b の「積の和」とする

性質

基底0 と 基底1 は 直交する

すなわち

（基底0, 基底1）＝0　（基底1, 基底0）＝0

なお

（基底0, 基底0）≠0　（基底1, 基底1）≠0

スペクトルの求め方

信号＝大きさ0・基底0＋大きさ1・基底1

を

(信号, 基底0)　と　(信号, 基底1)

に代入すると

大きさ0　と　大きさ1

が求まる

スペクトルを計算する

(信号, 基底0)

内積

=((大きさ0・基底0＋大きさ1・基底1), 基底0)

線形性

=大きさ0・(基底0, 基底0) +大きさ1・(基底1, 基底0)

=大きさ0・(基底0, 基底0)

直交する

∴　大きさ0 = (信号, 基底0) ÷ (基底0, 基底0)

スペクトルの大きさ（まとめ）

前提

信号 = 大きさ0・基底0
+ 大きさ1・基底1

結論

大きさ0 = （信号, 基底0）÷（基底0, 基底0）

大きさ1 = （信号, 基底1）÷（基底1, 基底1）

性質

内積　　直交

（基底0, 基底1） = （基底1, 基底0） = 0

離散フーリエ変換（DFT）

FFTと結果は同じ

信号 = Σ 大きさ・基底 ÷N

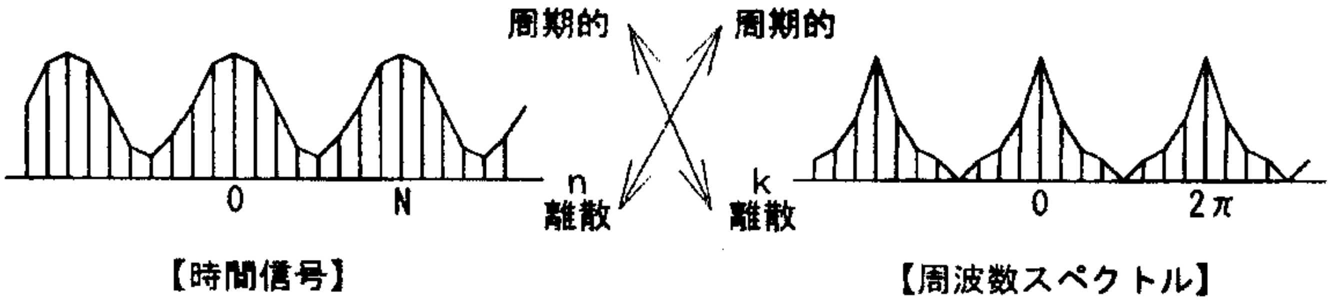
$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W^{+nk} \qquad n = 0,1,\cdots,N-1 \qquad W = e^{j2\pi/N}$$

大きさ = （信号, 基底） ←内積

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W^{-nk} \qquad k = 0,1,\cdots,N-1 \qquad W = e^{j2\pi/N}$$

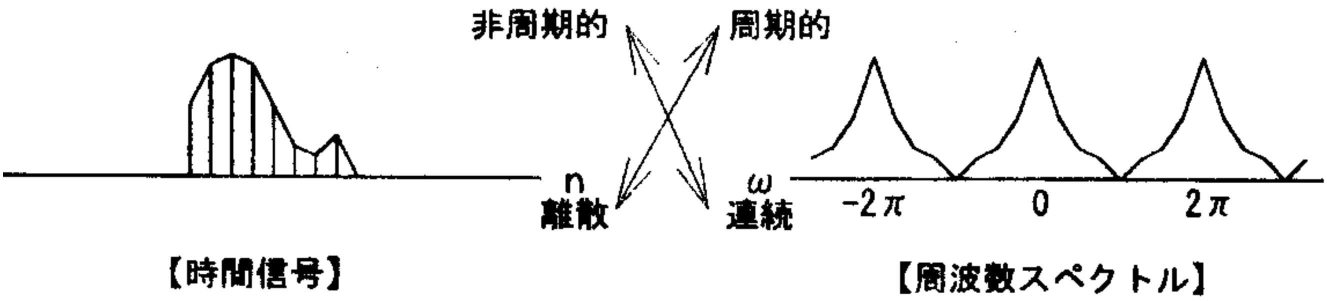
離散時間・フーリエ級数展開

DFT

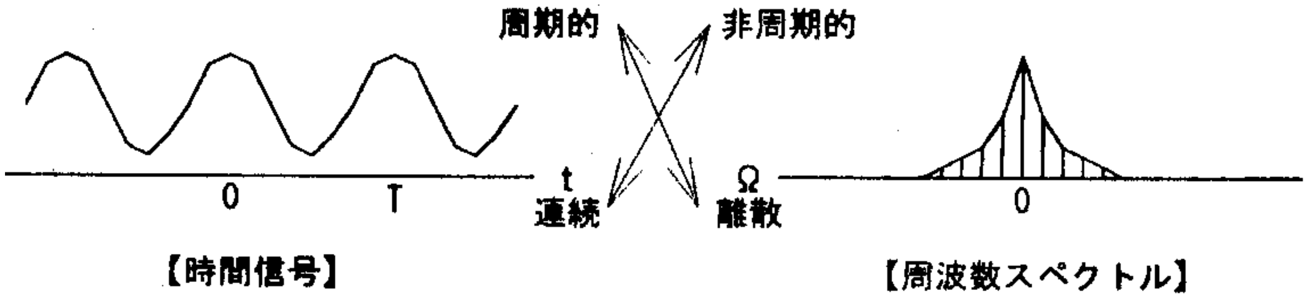


離散時間・フーリエ変換

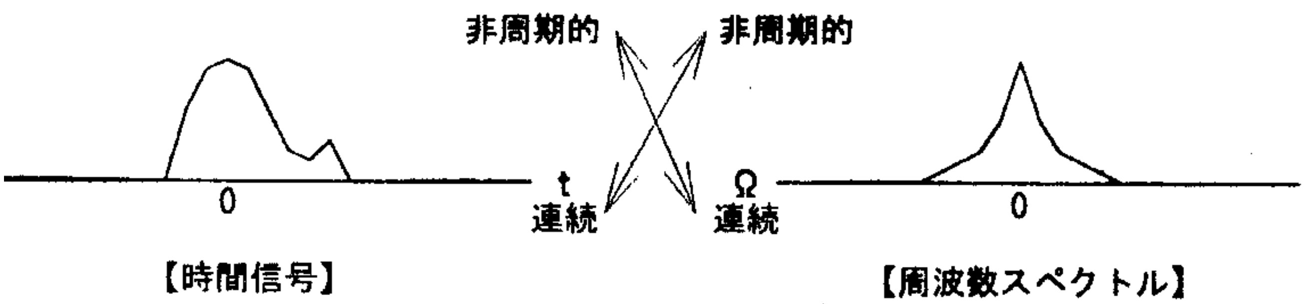
z変換



連続時間・フーリエ級数展開



連続時間・フーリエ変換



連続時間・フーリエ級数展開

フーリエ級数展開

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

フーリエ係数

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = x(t + T_0), \quad \omega_0 = 2\pi / T_0$$

連続時間・フーリエ変換

フーリエ逆変換

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

フーリエ変換

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$